ГОСУДАРСТВЕННЫЙ СТАНДАРТ
СОЮЗА ССР

ПРИКЛАДНАЯ СТАТИСТИКА

ПРАВИЛА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОЦЕНОК И ДОВЕРИТЕЛЬНЫХ ГРАНИЦ ДЛЯ ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕЙБУЛЛА

ГОСТ 11.007—75

Издание официальное

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ СТАНДАРТОВ
СОВЕТА МИНИСТРОВ СССР
Москва

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ СТАНДАРТ
СОЮЗА ССР

ПРИКЛАДНАЯ СТАТИСТИКА

ПРАВИЛА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОЦЕНОК И ДОВЕРИТЕЛЬНЫХ ГРАНИЦ ДЛЯ ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕЙБУЛЛА

ГОСТ 11.007—75

Издание официальное

МОСКВА — 1978

УДК 658.562.012.7(083.74) Группа Т59

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ СТАНДАРТ СОЮЗА ССР

Прикладная статистика

ПРАВИЛА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОЦЕНОК И ДОВЕРИТЕЛЬНЫХ ГРАНИЦ ДЛЯ ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕЙБУЛЛА

Applied statistics. Point and interval estimators for parameters of weibull distribution

ГОСТ 11.007—75

Постановлением Государственного комитета стандартов Совета Министров СССР от 5 сентября 1975 г. № 2347 срок введения установлен

с 01.07. 1976 г.

Настоящий стандарт устанавливает правила определения оценок и доверительных границ для параметров распределения Вейбулла по совокупности статистических (опытных) данных, полученных на производстве в процессе измерений, испытаний и анализов, если эти опытные данные подчиняются распределению Вейбулла.

1. ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ И ПОЛОЖЕНИЯ

1.1. Правила и положения данного стандарта устанавливаются для распределения Вейбулла, задаваемого плотностью распределения:

$$f(x, a, b, c)=\begin{cases}\frac{b}{a}\left(\frac{x-c}{a}\right)^{b-1}e^{-\left(\frac{x-c}{a}\right)^{b}}, & \text{если } x\geqslant c\\ 0, & \text{если } x<c,\end{cases} \tag{1}$$

где a — параметр масштаба,

b — параметр формы,

c — параметр сдвига

(см. приложение 4, чертеж).

1.2. Оценка параметров a, b, c осуществляется по выборке независимых наблюдений x_1, x_2, . . ., x_n случайной величины X, заведомо подчиняющейся распределению Вейбулла. Согласие наблюдений x_1, x_2, . . ., x_n с распределением Вейбулла — по ГОСТ 11.006—74.

Издание официальное **Перепечатка воспрещена**

Переиздание. Ноябрь 1977 г.

1.3. Стандарт устанавливает правила определения оценок для параметров a, b, c методом моментов для следующих случаев:

[a] — оценка параметра масштаба a при известном значении параметров формы b и сдвига c,

[a, b] — оценка параметров масштаба a и формы b при известном значении параметра сдвига c,

[a, c] — оценка параметров масштаба a и сдвига c при известном значении параметров формы b,

[a, b, c] — оценка всех трех параметров.

Стандарт устанавливает правила определения доверительных границ для параметров a, b, с для случаев:

[a] — определение доверительных границ для параметра a при известных значениях параметров формы b и сдвига c;

[a, b] — определение доверительных границ для параметров масштаба a и формы b при известном значении параметра сдвига c.

2. ОЦЕНКА ПАРАМЕТРА МАСШТАБА a ПРИ ИЗВЕСТНОМ ЗНАЧЕНИИ ПАРАМЕТРОВ ФОРМЫ b И СДВИГА c [СЛУЧАЙ [a]]

2.1. Оценка параметра a при известном значении параметров b и c осуществляется по формуле

$$\bar{a}=\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-c)^b}{n-1}\right)^{\frac{1}{b}} . \qquad (2)$$

(См. приложение 2, пример 1).

3. ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ МАСШТАБА a И ФОРМЫ b ПРИ ИЗВЕСТНОМ ЗНАЧЕНИИ ПАРАМЕТРА СДВИГА c [СЛУЧАЙ [a, b]]

3.1. Оценка параметров a и b при значении параметра c осуществляется следующим образом:

вычисляют выборочное среднее арифметическое значение $\bar{x}$ и выборочное среднее квадратическое отклонение S по формулам:

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i, \qquad (3)$$

$$S=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2} , \qquad (4)$$

а также отношение

$$v_b=\frac{S}{\bar{x}-c}\ , \qquad (5)$$

по полученному значению v_b из табл. 1 находят значение оценки $\bar{b}$ параметров b и значение коэффициента K_b;

по полученному значению K_b определяют оценку для параметра a по формуле

$$\bar{a}=\frac{\bar{x}-c}{K_b}\ , \qquad (6)$$

Если в табл. 1 нет соответствующего значения v_b, то необходимо воспользоваться линейной интерполяцией (см. приложение 2, пример 2).

4. ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ МАСШТАБА a И СДВИГА c ПРИ ИЗВЕСТНОМ ЗНАЧЕНИИ ПАРАМЕТРА ФОРМЫ b [СЛУЧАЙ $[a,\ c]$]

4.1. Оценка параметров a и c при известном значении параметра $b=b_0$ осуществляется следующим образом:

по значению параметра $b=b_0$ из табл. 1 находят значение коэффициентов g_b и K_b ;

определяют оценку для параметра a по формуле

$$\bar{a}=\frac{S}{g_b}\ , \qquad (7)$$

где S — определяется согласно формуле (4);

находят значение $\bar{c}$ по формуле

$$\bar{c}=\bar{x}-\bar{a}K_b; \qquad (8)$$

в качестве оценки параметра c берут одно из двух значений:

$$c=\begin{cases}\bar{c}, \text{ если } \bar{c}\leqslant x_n(1).\\ x_n(1), \text{ если } \bar{c}>x_n(1),\end{cases} \qquad (9)$$

где $x_n(1)$ — наименьшее значение среди наблюденных значений $x_1,\ x_2,\ \ldots,x_n$.

(См. приложение 2, пример 3).

5. ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ МАСШТАБА a ФОРМЫ b И СДВИГА c [СЛУЧАЙ $[a,\ b,c]$]

5.1. Оценка параметра a осуществляется следующим образом: определяют асимметрию ρ_b по формуле

$$\rho_b=\frac{\frac{n}{(n-1)(n-2)}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^3}{\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right]^{3/2}}; \qquad (10)$$

по полученному значению ρ_b из табл. 1 находят оценку $\bar{b}$ параметра b и значения коэффициентов g_b и K_b;

по полученному значению $\bar{b}$ осуществляют оценку параметров a и c согласно разд. 4.

(См. приложение 2, пример 4).

6. ПРАВИЛА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДОВЕРИТЕЛЬНЫХ ГРАНИЦ ДЛЯ ПАРАМЕТРА МАСШТАБА a ПРИ ИЗВЕСТНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ПАРАМЕТРОВ ФОРМЫ b И СДВИГА c (СЛУЧАЙ [a])

6.1. Определение доверительных границ для параметра a при известном значении параметров b и c сводится к определению доверительных границ для параметров экспоненциального распределения и осуществляется следующим образом:

из совокупности наблюдений x_1, x_2, . . ., x_n образуют совокупность величин

$$y_1=(x_1-c)^b,\ y_2=(x_2-c)^b,\ldots,y_n=(x_n-c)^b;$$

по совокупности значений y_1, y_2, . . ., y_n согласно ГОСТ 11.005—74 образуют доверительные границы для параметра $\lambda=\frac{1}{a^b}$ экспоненциального распределения;

вычисляют нижнюю доверительную границу для параметра a по формуле

$$a_{\text{н}}=\left(\frac{1}{\lambda_{\text{в}}}\right)^{\frac{1}{b}}, \qquad (11)$$

где $\lambda_{\text{в}}$ — верхняя доверительная граница для параметра λ, найденная согласно ГОСТ 11.005—74;

вычисляют верхнюю доверительную границу для параметра a по формуле

$$a_{\text{в}}=\left(\frac{1}{\lambda_{\text{н}}}\right)^{\frac{1}{b}}, \qquad (12)$$

где $\lambda_{\text{н}}$ — нижняя доверительная граница для параметра λ, найденная согласно ГОСТ 11.005—74;

нижняя и верхняя доверительные границы $a_н$, $a_в$ образуют доверительный интервал для параметра a, соответствующий доверительной вероятности γ^*

$$\gamma^*=\gamma_1+\gamma_2-1, \qquad (13)$$

$$\gamma_1>0{,}5; \qquad \gamma_2>0{,}5,$$

где γ_1 — односторонняя доверительная вероятность, соответствующая доверительной границе $a_н$;

γ_2 — односторонняя доверительная вероятность, соответствующая верхней доверительной границе $a_в$.

$$\text{Вер}\ \{a\geqslant a_н\}=\gamma_1;\ \text{Вер}\ \{a\leqslant a_в\}=\gamma_2.$$

(См. приложение 2, пример 5).

7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДОВЕРИТЕЛЬНЫХ ГРАНИЦ ДЛЯ ПАРАМЕТРОВ МАСШТАБА a И ФОРМЫ b ПРИ ИЗВЕСТНОМ ЗНАЧЕНИИ ПАРАМЕТРА СДВИГА c (СЛУЧАЙ $[a, b]$).

7.1. Определение нижней доверительной границы $b_н$ для параметра b при неизвестном значении параметра a и известном значении параметра c осуществляется следующим образом:

задают одностороннюю доверительную вероятность γ_1;

вычисляют корень $\hat{b}$ уравнения (1) приложения 1;

по заданному объему выборки n $(5\leqslant n\leqslant 120)$ и заданному значению γ_1 в табл. 2 находят значение коэффициента $l_н$;

вычисляют нижнюю доверительную границу для параметра b по формуле

$$b_н=\frac{\hat{b}}{l_н}\ ; \qquad (14)$$

при значении объема выборки $n>120$ значение коэффициента $l_н$ вычисляют по формуле

$$l_н=1+\sqrt{\frac{0{,}608}{n}}\cdot u_{\gamma_1}, \qquad (15)$$

где u_{γ_1} — квантиль нормального распределения, соответствующая вероятности γ_1 (см. табл. 4).

7.2. Определение верхней доверительной границы $b_в$ для параметра b при неизвестном значении параметра a и известном значении параметра c осуществляется следующим образом:

задают одностороннюю доверительную вероятность γ_2;

вычисляют корень $\hat{b}$ уравнения (1) приложения 1;

по заданному объему выборки n $(5\leqslant n\leqslant 120)$ и значению γ_2 из табл. 2 находят значение коэффициента $l_в$;

вычисляют верхнюю доверительную границу для параметра b по формуле

$$b_{в}=\frac{\hat{b}}{l_{в}}\ ; \qquad (16)$$

при значении объема выборки $n>120$ значение $l_{в}$ определяется по формуле

$$l_{в}=1-\sqrt{\frac{0{,}608}{n}}\cdot u_{\gamma_2}, \qquad (17)$$

где значение u_{γ_2} — приведено в табл. 4 (см. п. 7.1). (См. приложение 2, примеры 6,7).

7.3. Определение доверительного интервала для параметра b при неизвестном значении параметра a и известном значении параметра с осуществляется следующим образом:

задают доверительную вероятность γ^* и односторонние доверительные вероятности γ_1 и γ_2 таким образом, чтобы γ^*, γ_1 и γ_2 удовлетворяли соотношению (13);

для односторонней доверительной вероятности γ_1 согласно п. 7.1 определяют нижнюю доверительную границу $b_{н}$;

для односторонней доверительной вероятности γ_2 согласно п. 7.2 определяют верхнюю доверительную границу $b_{в}$;

нижняя $b_{н}$ и верхняя $b_{в}$ доверительной границы образуют доверительный интервал для параметра b с доверительной вероятностью

$$\gamma^*=\gamma_1+\gamma_2-1.$$

(См. приложение 2, примеры 6,7).

7.4. Определение нижней доверительной границы $a_{н}$ для параметра a при неизвестном значении параметра b и известном значении c осуществляется следующим образом:

задают одностороннюю доверительную вероятность γ_1;

вычисляют корни $\hat{b}$ и $\hat{a}$ уравнений (1), (2) приложения 1;

по заданному объему выборки n ($5\leqslant n\leqslant 120$) и значению γ_1 из табл. 3 находят значение коэффициента $z_{н}$;

вычисляют нижнюю доверительную границу для параметра a по формуле

$$a_{н}=\hat{a}\cdot e^{-z_{н}/\hat{b}}\ ; \qquad (18)$$

при значении объема выборки $n>120$ значение $z_{н}$ вычисляют по формуле

$$z_{н}=u_{\gamma_1}\sqrt{\frac{1{,}108}{n}}\ , \qquad (19)$$

где значение u_{γ_1} — приведено в табл. 4 (см. п. 7.1).

Таблица 1

Значения K_b, , g_b, , v_b, ρ_b, P_0 для заданных значений b

b	K_b	g_b	v_b	ρ_b	P_0
0,20	120,0	1901	15,84	190,1	0,926
0,30	9,261	30,10	5,408	28,33	0,857
0,40	3,323	10,45	3,141	11,35	0,801
0,50	2,000	4,472	2,236	6,619	0,756
0,60	1,505	2,645	1,758	4,593	0,721
0,70	1,266	1,851	1,462	3,498	0,692
0,80	1,133	1,428	1,260	2,815	0,668
0,90	1,073	1,199	1,113	2,345	0,649
1,00	1,000	1,000	1,000	2,000	0,632
1,10	0,965	0,878	0,910	1,734	0,617
1,20	0,940	0,787	0,837	1,521	0,605
1,30	0,923	0,716	0,776	1,346	0,594
1,40	0,911	0,660	0,724	1,198	0,584
1,50	0,903	0,613	0,679	1,072	0,575
1,60	0,897	0,574	0,640	0,962	0,568
1,70	0,892	0,540	0,605	0,865	0,561
1,80	0,889	0,511	0,575	0,779	0,555
1,90	0,888	0,486	0,547	0,701	0,549
2,00	0,886	0,463	0,523	0,631	0,544
2,10	0,886	0,443	0,500	0,567	0,539
2,20	0,886	0,425	0,480	0,509	0,534
2,30	0,886	0,408	0,461	0,455	0,530
2,40	0,886	0,393	0,444	0,405	0,527
2,50	0,887	0,380	0,428	0,358	0,523
2,60	0,888	0,367	0,413	0,315	0,520
2,70	0,889	0,355	0,399	0,275	0,517
2,80	0,890	0,344	0,387	0,237	0,514
2,90	0,891	0,333	0,375	0,202	0,511
3,00	0,893	0,325	0,363	0,168	0,509
3,10	0,895	0,314	0,353	0,136	0,507
3,20	0,896	0,307	0,343	0,106	0,504
3,30	0,897	0,298	0,333	0,078	0,501
3,40	0,898	0,292	0,325	0,051	0,500
3,50	0,898	0,290	0,316	0,025	0,497
3,60	0,899	0,277	0,308	0,001	0,496
3,70	0,901	0,276	0,301	—0,023	0,495
3,80	0,904	0,265	0,294	—0,045	0,493
3,90	0,905	0,260	0,287	—0,067	0,492
4,00	0,906	0,254	0,280	—0,087	0,490
4,10	0,908	0,249	0,274	—0,107	0,489
4,20	0,909	0,244	0,268	—0,126	0,488
4,30	0,910	0,239	0,263	—0,144	0,487
4,40	0,911	0,234	0,257	—0,161	0,486
4,50	0,913	0,230	0,252	—0,178	0,485
4,60	0,914	0,225	0,247	—0,195	0,483
4,70	0,915	0,221	0,242	—0,210	0,482
4,80	0,916	0,217	0,238	—0,225	0,481
4,90	0,917	0,214	0,233	—0,240	0,480

Продолжение табл. 1

b	K_b	g_b	v_b	ρ_b	P_0
5,00	0,918	0,210	0,229	—0,254	0,479
5,10	0,919	0,207	0,225	—0,268	0,478
5,20	0,920	0,203	0,221	—0,281	0,477
5,30	0,921	0,199	0,217	—0,294	0,477
5,40	0,922	0,197	0,213	—0,306	0,476
5,50	0,923	0,194	0,210	—0,318	0,475
5,60	0,924	0,190	0,206	—0,330	0,474
5,70	0,925	0,187	0,203	—0,341	0,474
5,80	0,926	0,184	0,200	—0,352	0,473
5,90	0,927	0,181	0,197	—0,363	0,472
6,00	0,928	0,180	0,194	—0,373	0,471
6,10	0,928	0,177	0,191	—0,383	0,471
6,20	0,929	0,175	0,188	—0,393	0,471
6,30	0,930	0,173	0,185	—0.403	0,470
6,40	0,931	0,170	0,183	—0,412	0,469
6,50	0,932	0,168	0,180	—0,421	0,468
6,60	0,932	0,166	0,177	—0,430	0,468
6,70	0,933	0,163	0,175	—0,439	0,468
6,80	0,934	0,161	0,173	—0,447	0,467
6,90	0,935	0,159	0,170	—0,455	0,466
7,00	0,935	0,157	0,168	—0,463	0,465
7,50	0,939	0,147	0,158	—0,500	0,464
8,00	0,942	0,140	0,148	—0,534	0,461
8,50	0,945	0,131	0,140	—0,564	0,460
9,00	0,947	0,126	0,133	—0,591	0,458
9,50	0,949	0,120	0,126	—0,615	0,457
10,00	0,951	0,114	0,120	—0,638	0,455

Таблица 2

Значения $l_н$ и $l_в$

Объем выборки n	$l_н$				$l_в$			
	$\gamma_1=0,75$	$\gamma_1=0,90$	$\gamma_1=0,95$	$\gamma_1=0,98$	$\gamma_2=0,75$	$\gamma_2=0,90$	$\gamma_2=0\ 95$	$\gamma_2=0,98$
5	1,671	2,277	2,779	3,518	0,951	0,766	0,683	0,604
6	1,543	2,030	2,436	3,067	0,937	0,778	0,697	0,623
7	1,461	1,861	2,183	2,640	0,930	0,785	0,709	0,639
8	1,404	1,747	2,015	2,377	0,926	0,792	0,720	0,653
9	1,361	1,665	1,896	2,199	0,925	0,797	0,729	0,665
10	1,328	1,602	1,807	2,070	0,924	0,802	0,738	0,676
11	1,302	1,553	1,738	1,972	0,924	0,807	0,745	0,686
12	1,281	1,513	1,682	1,894	0,924	0,811	0,752	0,695
13	1,263	1,480	1,636	1,830	0,924	0,815	0,759	0,703
14	1,248	1,452	1,597	1,777	0,925	0,819	0,764	0,710
15	1,234	1,427	1,564	1,732	0,925	0,823	0,770	0,716

Продолжение табл. 2

Объем выборки n	$l_н$				$l_в$			
	$\gamma_1=0{,}75$	$\gamma_1=0{,}90$	$\gamma_1=0{,}95$	$\gamma_1=0{,}98$	$\gamma_2=0{,}75$	$\gamma_2=0{,}90$	$\gamma_2=0{,}95$	$\gamma_2=0{,}98$
16	1,223	1,406	1,535	1,693	0,926	0,826	0,775	0,723
17	1,213	1,388	1,510	1,660	0,927	0,829	0,779	0,728
18	1,204	1,371	1,487	1,630	0,927	0,832	0,784	0,734
19	1,196	1,356	1,467	1,603	0,928	0,835	0,788	0,739
20	1,188	1,343	1,449	1,579	0,929	0,838	0,791	0,743
22	1,176	1,320	1,418	1,538	0,930	0,843	0,798	0,752
24	1,165	1,301	1,392	1,504	0,932	0,848	0,805	0,759
26	1,156	1,284	1,370	1,475	0,933	0,852	0,810	0,766
28	1,148	1,269	1,351	1,450	0,934	0,856	0,815	0,772
30	1,141	1,257	1,334	1,429	0,935	0,860	0,820	0,778
32	1,135	1,246	1,319	1,409	0,937	0,863	0,824	0,783
34	1,129	1,236	1,306	1,392	0,938	0,866	0,828	0,788
36	1,125	1,227	1,294	1,377	0,939	0,869	0,832	0,793
38	1,120	1,219	1,283	1,363	0,940	0,872	0,835	0,797
40	1,116	1,211	1,273	1,351	0,940	0,875	0,839	0,801
42	1,112	1,204	1,265	1,339	0,941	0,877	0,842	0,804
44	1,109	1,198	1,256	1,329	0,942	0,880	0,845	0,808
46	1,106	1,192	1,249	1,319	0,943	0,882	0,847	0,811
48	1,103	1,187	1,242	1,310	0,944	0,884	0,850	0,814
50	1,100	1,182	1,235	1,301	0,944	0,886	0,852	0,817
52	1,098	1,177	1,229	1,294	0,945	0,888	0,854	0,820
54	1,095	1,173	1,224	1,286	0,946	0,890	0,857	0,822
56	1,093	1,169	1,218	1,280	0,946	0,891	0,859	0,825
58	1,091	1,165	1,213	1,273	0,947	0,893	0,861	0,827
60	1,089	1,162	1,208	1,267	0,948	0,894	0,863	0,830
62	1,087	1,158	1,204	1,262	0,948	0,896	0,864	0,832
64	1,086	1,155	1,200	1,256	0,949	0,897	0,866	0,834
66	1,084	1,152	1,196	1,251	0,949	0,899	0,868	0,836
68	1,083	1,149	1,192	1,246	0,950	0,900	0,869	0,838
70	1,081	1,146	1,188	1,242	0,950	0,901	0,871	0,840
72	1,080	1,144	1,185	1,237	0,951	0,903	0,872	0,841
74	1,078	1,141	1,182	1,233	0,951	0,904	0,874	0,843
76	1,077	1,139	1,179	1,229	0,952	0,905	0,875	0,845
78	1,076	1,136	1,176	1,225	0,952	0,906	0,876	0,846
80	1,075	1,134	1,173	1,222	0,952	0,907	0,878	0,848
85	1,072	1,129	1,166	1,213	0,953	0,910	0,881	0,852
90	1,069	1,124	1,160	1,206	0,954	0,912	0,883	0,855
95	1,067	1,120	1,155	1,199	0,955	0,914	0,886	0,858
100	1,065	1,116	1,150	1,192	0,956	0,916	0,888	0,861
110	1,062	1,110	1,141	1,181	0,958	0,920	0,893	0,866
120	1,058	1,104	1,133	1,171	0,959	0,923	0,897	0,871

Таблица 3

Значения $z_н$ и $z_в$

Объем выборки n	$z_н$				$z_в$			
	$\gamma_1=0{,}75$	$\gamma_1=0{,}90$	$\gamma_1=0{,}95$	$\gamma_1=0{,}98$	$\gamma_2=0{,}75$	$\gamma_2=0{,}90$	$\gamma_2=0{,}95$	$\gamma_2=0{,}98$
5	0,349	0,772	1,107	1,582	—0,444	—0,888	—1,247	—1,631
6	0,302	0,666	0,939	1,292	—0,385	—0,740	—1,007	—1,396
7	0,272	0,598	0,829	1,120	—0,344	—0,652	—0,874	—1,196
8	0,251	0,547	0,751	1,003	—0,313	—0,591	—0,784	—1,056
9	0,235	0,507	0,691	0,917	—0,289	—0,544	—0,717	—0,954
10	0,222	0,475	0,644	0,851	—0,269	—0,507	—0,665	—0,876
11	0,211	0,448	0,605	0,797	—0,258	—0,477	—0,622	—0,813
12	0,202	0,425	0,572	0,752	—0,239	—0,451	—0,587	—0,762
13	0,194	0,406	0,544	0,714	—0,228	—0,429	—0,557	—0,719
14	0,187	0,389	0,520	0,681	—0,217	—0,410	—0,532	—0,683
15	0,180	0,374	0,499	0,653	—0,208	—0,398	—0,509	—0,651
16	0,175	0,360	0,480	0,627	—0,200	—0,379	—0,489	—0,624
17	0,170	0,348	0,463	0,605	—0,193	—0,365	—0,471	—0,599
18	0,165	0,338	0,447	0,584	—0,187	—0,353	—0,455	—0,578
19	0,161	0,328	0,433	0,566	—0,181	—0,342	—0,441	—0,558
20	0,157	0,318	0,421	0,549	—0,175	—0,332	—0,428	—0,540
22	0,150	0,302	0,398	0,519	—0,166	—0,314	—0,404	—0,509
24	0,144	0,288	0,379	0,494	—0,158	—0,299	—0,384	—0,483
26	0,138	0,276	0,362	0,472	—0,150	—0,286	—0,367	—0,460
28	0,134	0,265	0,347	0,453	—0,144	—0,274	—0,352	—0,441
30	0,129	0,256	0,334	0,435	—0,139	—0,264	—0,338	—0,423
32	0,125	0,247	0,323	0,420	—0,134	—0,254	—0,326	—0,408
34	0,122	0,239	0,312	0,406	—0,129	—0,246	—0,315	—0,394
36	0,118	0,232	0,302	0,393	—0,125	—0,238	—0,305	—0,382
38	0,115	0,226	0,293	0,382	—0,121	—0,231	—0,296	—0,370
40	0,113	0,220	0,285	0,371	—0,118	—0,224	—0,288	—0,360
42	0,110	0,214	0,278	0,361	—0,116	—0,218	—0,280	—0,350
44	0,108	0,209	0,271	0,352	—0,112	—0,213	—0,273	—0,341
46	0,105	0,204	0,264	0,344	—0,109	—0,208	—0,266	—0,333
48	0,103	0,199	0,258	0,336	—0,106	—0,203	—0,260	—0,325

Объем выборки n	$z_н$				$z_в$			
	$\gamma_1=0{,}75$	$\gamma_1=0{,}90$	$\gamma_1=0{,}95$	$\gamma_1=0{,}98$	$\gamma_2=0{,}75$	$\gamma_2=0{,}90$	$\gamma_2=0{,}95$	$\gamma_2=0{,}98$
50	0,101	0,195	0,253	0,328	—0,104	—0,198	—0,254	—0,318
52	0,099	0,191	0,247	0,321	—0,102	—0,194	—0,249	—0,312
54	0,097	0,187	0,243	0,315	—0,100	—0,190	—0,244	—0,305
56	0,096	0,184	0,238	0,309	—0,098	—0,186	—0,239	—0,299
58	0,094	0,181	0,233	0,303	—0,096	—0,183	—0,234	—0,294
60	0,092	0,177	0,229	0,297	—0,094	—0,179	—0,230	—0,289
62	0,091	0,174	0,225	0,292	—0,092	—0,176	—0,226	—0,284
64	0,089	0,171	0,221	0,287	—0,091	—0,178	—0,222	—0,279
66	0,088	0,169	0,218	0,282	—0,089	—0,170	—0,218	—0,274
68	0,087	0,166	0,214	0,278	—0,088	—0,167	—0,215	—0,270
70	0,085	0,164	0,211	0,274	—0,086	—0,165	—0,211	—0,266
72	0,084	0,161	0,208	0,269	—0,085	—0,162	—0,208	—0,262
74	0,083	0,159	0,205	0,266	—0,084	—0,160	—0,205	—0,259
76	0,082	0,157	0,202	0,262	—0,083	—0,158	—0,202	—0,255
78	0,081	0,155	0,199	0,258	—0,081	—0,155	—0,199	—0,252
80	0,080	0,153	0,197	0,255	—0,080	—0,153	—0,197	—0,248
85	0,077	0,148	0,190	0,246	—0,078	—0,148	—0,190	—0,241
90	0,075	0,143	0,185	0,239	—0,075	—0,144	—0,184	—0,234
95	0,073	0,139	0,179	0,232	—0,073	—0,139	—0,179	—0,227
100	0,071	0,136	0,175	0,226	—0,071	—0,136	—0,174	—0,221
110	0,067	0,129	0,166	0,215	—0,067	—0,129	—0,165	—0,211
120	0,064	0,123	0,159	0,205	—0,064	—0,123	—0,158	—0,202

Таблица 4

γ	0,75	0,90	0,95	0,98	0,99
u_γ	0,675	1,282	1,645	2,054	2,326

7.5. Определение верхней доверительной границы для параметра a при неизвестном значении параметра b и известном значении c осуществляется следующим образом:

задают одностороннюю доверительную вероятность γ_2 и вычисляют корни $\hat{b}$ и $\hat{a}$ уравнений (1) и (2) приложения 1;

по заданному объему выборки n ($5 \leqslant n \leqslant 120$) и значению γ_2 из табл. 3 находят значение коэффициента $z_в$;

определяют верхнюю доверительную границу для параметра a по формуле

$$a_в = \hat{a} \cdot e^{-z_в/\hat{b}} \; ; \tag{20}$$

при значении объема выборки $n > 120$ значение $z_в$ определяют по формуле

$$z_в = -u_{\gamma_2} \sqrt{\frac{1,108}{n}} \; , \tag{21}$$

где u_{γ_2} — приведено в табл. 4.

7.6. Определение доверительного интервала для параметра a при неизвестном значении параметра b и известном значении c осуществляют следующим образом:

задают доверительную вероятность γ^* и односторонние доверительные вероятности γ_1 и γ_2 таким образом, чтобы γ^*, γ_1 и γ_2 удовлетворяли соотношению (13);

для односторонней доверительной вероятности γ_1 согласно п. 7.4 определяют нижнюю границу $a_н$;

для односторонней доверительной вероятности γ_2 согласно п. 7.5 определяют верхнюю доверительную границу $a_в$;

нижняя $a_н$ и верхняя $a_в$ доверительные границы образуют доверительный интервал для параметра a при доверительной вероятности $\gamma^* = \gamma_1 + \gamma_2 - 1$ (см. приложение 2, примеры 6, 8).

ПРИЛОЖЕНИЕ 1
Рекомендуемое

ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕЙБУЛЛА МЕТОДОМ МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ

1. Метод максимального правдоподобия применяется, когда имеются повышенные требования к эффективности оценок.

Случай $[a, b]$. Оценка параметров масштаба a и формы b при известном значении параметра сдвига c по методу максимального правдоподобия осуществляется путем решения системы уравнений

$$\frac{n}{b}-\frac{n\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-c)^b\ln(x_i-c)}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-c)^b}+\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i-c)=0, \qquad (1)$$

$$a=\left[\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-c)^b}{n}\right]^{\frac{1}{b}}. \qquad (2)$$

Решение уравнения (1) данного приложения осуществляется методом последовательных приближений (методом Ньютона — Рафсона) по рекуррентной формуле

$$\hat{b}_{k+1}=\hat{b}_k+\frac{\frac{1}{b_k}+\frac{S_1}{n}-\frac{S_3^{(k)}}{S_2^{(k)}}}{\frac{1}{\hat{b}_k^2}+\frac{S_2^{(k)}\cdot S_4^{(k)}-(S_3^{(k)})^2}{(S_2^{(k)})^2}}, \qquad (3)$$

$$S_1=\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i-c), \qquad (4)$$

$$S_2^{(k)}=\sum_{i=1}^{n}(x_i-c)^{\hat{b}_k}, \qquad (5)$$

$$S_3^{(k)}=\sum_{i=1}^{n}(x_i-c)^{\hat{b}_k}\cdot\ln(x_i-c), \qquad (6)$$

$$S_4^{(k)}=\sum_{i=1}^{n}(x_i-c)^{\hat{b}_k}\cdot\ln^2(x_i-c), \qquad (7)$$

$\hat{b}_k$ — k-е приближение к корню $\hat{b}$ уравнения (1) данного приложения,

$\hat{b}_0$ — начальное приближение к корню $\hat{b}$ уравнения (1) данного приложения.

2. В качестве начального приближения может быть взято значение оценки $\bar{b}$, полученной методом моментов, или значение оценки параметра b, полученной с помощью вероятностных сеток (по ГОСТ 11.008—74), или значение оценки параметра b, полученной по значению вероятности P_0 с помощью табл. 1.

$$P_0 = \text{Вер}\{x < \bar{x}\}. \qquad (8)$$

Оценка вероятности P_0 осуществляется по накопленной частости

$$f_k = \frac{1}{n}\left(K - \frac{1}{2}\right). \qquad (9)$$

(См. приложение 2, пример 8).

3. Чтобы получить несмещенную оценку $\tilde{b}$ для параметра b, следует умножить значение корня $\hat{b}$ на коэффициент $B(n)$, приведенный в таблице данного приложения.

Оценка a параметра a получается из уравнения (2) данного приложения, в которое вместо значения b подставляется значение $\tilde{b}$ (см. приложение 2, пример 6).

Значения $B(n)$ для получения несмещенной оценки параметра формы b

n	$B(n)$	n	$B(n)$	n	$B(n)$	n	$B(n)$	n	$B(n)$
5	0,669	15	0,908	34	0,960	54	0,975	74	0,982
6	0,752	16	0,914	36	0,962	56	0,976	76	0,983
7	0,792	18	0,923	38	0,964	58	0,977	78	0,983
8	0,820	20	0,931	40	0,968	60	0,978	80	9,984
9	0,842	22	0,938	42	0,968	62	0,979	85	9,985
10	0,859	24	0,943	44	0,970	64	0,980	90	0,985
11	0,872	26	0,947	46	0,971	66	0,980	100	0,987
12	0,883	28	0,951	48	0,972	68	0,981	120	0,990
13	0,893	30	0,955	50	0,973	70	0,981		
14	0,901	32	0,958	52	0,974	72	0,982		

4. Случай $[a, c]$. Оценка параметра a и c при известном значении параметра $b = b_0$ по методу максимального правдоподобия осуществляется следующим образом:

— если значение $0 < b_0 < 2$, то в качестве оценки параметра c берут минимальное значение $x_n(1)$ из наблюденных значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$;

— вычисляют оценку параметра a по формуле

$$\hat{a} = \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_n(1))^{b_0}\right]^{\frac{1}{b_0}}. \qquad (10)$$

(См. приложение 2, пример 9).

5. Если $b_0>2$, то оценку параметров a и c осуществляют путем решения системы уравнений:

$$nb_0\cdot\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-c)^{b_0-1}}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-c)^{b_0}}-(b_0-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i-c}=0, \tag{11}$$

$$\hat{a}=\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-c)^{b_0}\right]^{\frac{1}{b_0}}. \tag{12}$$

Оценка параметра c находится из уравнения (11) данного приложения методом последовательных приближений (методом Ньютона—Рафсона) по формуле

$$\hat{c}_{k+1}=\hat{c}_k-\frac{S_4^{(k)}-\frac{b_0-1}{b_0 n}\cdot S_1^{(k)}}{\frac{(b_0-1)S_3^{(k)}\cdot S_5^{(k)}-b_0(S_4^{(k)})^2}{(S_5^{k})^2}-\frac{b_0-1}{b_0 n}\cdot S_2^{(k)}} \tag{13}$$

$$S_1^{(k)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i-\hat{c}_k}, \tag{14}$$

$$S_2^{(k)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(x_i-\hat{c}_k)^2}, \tag{15}$$

$$S_3^{(k)}=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\hat{c}_k)^{b_0-2}, \tag{16}$$

$$S_4^{(k)}=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\hat{c}_k)^{b_0-1}, \tag{17}$$

$$S_5^{(k)}=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\hat{c}_k)^{b_0}, \tag{18}$$

$\hat{c}_0$ — начальное приближение к корню c, которое может быть получено или методом моментов, или с помощью вероятностных сеток, или с помощью значения вероятности P_0 (см. формулы (8), (9) данного приложения и приложения 2, пример 8);

по полученному значению $c=\hat{c}$ и данному значению b_0 согласно формуле (12) данного приложения находят оценку для параметра a (см. приложение 2, пример 10).

6. Случай $[a, b, c]$. Оценка параметров a, b, c распределения Вейбулла по методу максимального правдоподобия осуществляется путем решения системы уравнений:

$$(b-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i-c}-b\cdot n\,\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-c)^{b-1}}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-c)^{b}}=0, \tag{19}$$

$$\frac{n}{b}+\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i-c)-\frac{n\sum_{i=1}^{n}(x_i-c)^{b}\ln(x_i-c)}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-c)^{b}}=0, \tag{20}$$

$$a=\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-c)^{b}\right]^{\frac{1}{b}}. \tag{21}$$

Решение системы уравнений (19), (20), (21), осуществляется следующим образом:

согласно п. 2 данного приложения находят начальное приближение для оценок параметров a, b, c.

Если окажется, что начальное приближение оценки параметра b не более 2, то в качестве оценки параметра сдвига берут наименьшее значение $x_n(1)$ из наблюденных значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Затем из уравнения (20) методом последовательных приближений (методом Ньютона—Рафсона) находят оценку для параметра b по формулам (3)—(7) данного приложения, где вместо значения c следует подставлять значение $x_n(1)$ (см. приложение 2, пример 11).

ПРИЛОЖЕНИЕ 2
Справочное

ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ ПРАВИЛ СТАНДАРТА

Пример 1. Дано 10 наблюдений случайной величины X, подчиняющейся распределению Вейбулла с известными значениями параметров формы $b=2$ и сдвига $c=2$. Найти оценку для параметра масштаба a. Результаты наблюдений приведены в табл. 1 данного приложения.

Таблица 1

Значения x_i

10,96	13,445	3,670	3,703	7,744	16,832
5,532	6,182	6,472	17,034		

Решение. Согласно формуле (2) получают:

$$\bar{a}=\left[\frac{\sum\limits_{i=1}^{10}(x_i-2)^2}{9}\right]^{\frac{1}{2}}=9,13.$$

Пример 2. Дано 100 наблюдений случайной величины, подчиняющейся распределению Вейбулла, если известно, что параметр сдвига $c=0$.

Результаты наблюдений, расположенные в порядке возрастания (вариационный ряд), приведены в табл. 2 данного приложения. Найти методом моментов оценки для параметров формы b и масштаба a.

Таблица 2

Значения x_i

0,027	0,251	0,446	0,667	0,843
0,033	0,266	0,480	0,670	0,855
0,091	0,267	0,506	0,675	0,887
0,106	0,270	0,510	0,705	0,925
0,117	0,273	0,561	0,706	0,937
0,135	0,288	0,576	0,738	0,949
0,136	0,291	0,588	0,741	0,949
0,211	0,333	0,611	0,748	0,986
0,211	0,342	0,615	0,748	0,987
0,228	0,363	0,631	0,749	1,085
0,231	0,415	0,646	0,778	1,127
0,236	0,434	0,646	0,782	1,161
0,239	0,445	0,649	0,826	1,198

Продолжение табл. 2

1,225	1,373	1,435	1,822	2,185
1,242	1,375	1,501	1,849	2,285
1,248	1,418	1,521	1,897	2,646
1,265	1,419	1,573	1,964	3,101
1,283	1,421	1,745	1,969	3,904
1,341	1,427	1,764	2,031	4,007
1,363	1,432	1,807	2,038	4,388

Решение. Согласно формулам (3), (4) и (5) вычисляют

$$\bar{x}=\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} x_i=1,034,$$

$$S=\sqrt{\frac{1}{99}\sum_{i=1}^{100}(x_i-\bar{x})^2}=0,874,$$

$$v_b=\frac{0,874}{1,034}=0,845.$$

Из табл. 1 находят, что для $b=1,10$ $v=0,910$, а для $b=1,20$ $v_b=0,837$. Применяя линейную интерполяцию:

$$b_1=1,10; \qquad v_{b_1}=0,910;$$

$$b= \quad ; \qquad v_b=0,845;$$

$$b_2=1,20; \qquad v_{b_2}=0,837,$$

получают

$$b=b_2\frac{v_b-b_{b_1}}{v_{b_2}-v_{b_1}}+b_1\frac{v_{b_2}-b_b}{v_{b_2}-v_{b_1}}=\frac{1,20(0,845-0\ 910)}{0,837-0,910}+\frac{1,10(0,837-0,845)}{0,837-0,910}=1,19.$$

С помощью табл. 1 и используя линейную интерполяцию, получают значение K_b;

$$b_1=1,10; \qquad K_{b_1}=0,965;$$

$$b=1,19; \qquad K_b= \quad ;$$

$$b_2=1,20; \qquad K_{b_2}=0,940.$$

$$K_b=0,940\frac{(1,19-1,10)}{1,20-1,10}+0,965\frac{(1,20-1,19)}{1,20-1,10}=0,942.$$

Согласно формуле (6) находят оценку для параметра масштаба a

$$a=\frac{1,034}{0,942}=1,10.$$

Таким образом оценки для параметров a и b следующие:

$$\bar{a}=1,10; \quad \bar{b}=1,19.$$

Пример 3. табл. 2 примера 2 дано 100 наблюдений случайной величины X, подчиняющейся распределению Вейбулла. Известно, что $b=1{,}2$. Методом моментов найти оценки для параметров масштаба и сдвига.

Решение. Из табл. 1 определяют значение коэффициентов K_b и g_b. В нашем случае для $b=1{,}20$ имеем $K_b=0{,}940$; $g_b=0{,}787$.

Определяют среднее значение $\bar{x}$ и среднее квадратическое отклонение S

$$\bar{x}=\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100}x_i=1{,}034;$$

$$S=\sqrt{\frac{1}{99}\sum_{i=1}^{100}(x_i-1{,}034)^2}=0{,}874.$$

Согласно формуле (7) определяют оценку $\bar{a}$ для параметра a

$$\bar{a}=\frac{0{,}874}{0{,}787}=1{,}115.$$

По формуле (8) определяют

$$\bar{c}=1{,}034-1{,}115\cdot 0{,}940=-0{,}014.$$

Согласно формуле (9) в качестве оценки параметра сдвига c берут значение $\bar{c}=-0{,}014$, так как

$$\bar{c}=-0{,}014<x_{100}(1)=0{,}027.$$

Таким образом оценки для параметров масштаба a и сдвига c следующие:

$$\bar{a}=1{,}115; \qquad \bar{c}=-0{,}014.$$

Пример 4. Для 100 наблюдений, приведенных в табл. 2 примера 2, найти методом моментов оценки для параметров масштаба, формы и сдвига распределения Вейбулла.

Решение. Согласно формуле (10) вычисляют:

$$\rho_b=\frac{\frac{100}{99\cdot 98}\sum_{i=1}^{100}(x_i-1{,}034)^3}{\left[\frac{1}{99}\sum_{i=1}^{100}(x_i-1{,}034)^2\right]^{3/2}}=2{,}109,$$

где $\bar{x}=1{,}034$; $S=0{,}874$ получено согласно примеру 2.

По значению $\rho_b=2{,}109$ из табл. 1 находят значение $b=0{,}97$; $K_b=1{,}013$; $g_b=1{,}043$. В данном случае применена линейная интерполяция для получения значений $b=0{,}97$; $K_b=1{,}013$; $g_b=1{,}043$.

Согласно п. 5.1 и формуле (7) вычисляют:

$$\bar{a}=\frac{0{,}874}{1{,}043}=0{,}838.$$

Согласно формуле (8) получают

$$\bar{c}=1,034-0,838\cdot 1,013=0,185.$$

Согласно формуле (9) в качестве оценки параметра сдвига берут наименьшее значение из наблюдений. В нашем случае наименьший результат наблюдения равен

$$x_{100}^{(1)}(1)=0,027.$$

Таким образом оценки, полученные по методу моментов, равны:

$$\bar{a}=0,838;\ \bar{b}=0,97;\ \bar{c}=0,027.$$

Пример 5. Для данных примера 1 вычислить доверительные границы и доверительный интервал для параметра масштаба a, если

$$\gamma_1=\gamma_2=0,95;\ \gamma^*=\gamma_1+\gamma_2-1=0,90.$$

Решение. Из совокупности результатов наблюдений x_1, x_2, . . . , x_{10} образуют совокупность величин $y_i=(x_i-2)^2$, $i=1.2$, . . ., 10, которые приведены в табл. 3 данного приложения.

Таблица 3

Значения y_i

79,495	130,988	2,789	2,900	32,994
219,988	12,475	17,489	19,999	226,021

Для односторонней доверительной вероятности $\gamma_1=0,95$ согласно табл. 5 и 10 ГОСТ 11.005—74 находят нижнюю границу для параметра

$$\lambda=\frac{1}{a^b}=\frac{1}{a^2},$$

$$\lambda_н=\frac{\bar{\lambda}}{r_5}=\frac{0,012}{1,65}=0,007,$$

где $\bar{\lambda}=\dfrac{n-1}{\sum\limits_{i=1}^{10}(x_i-c)^b}=0,012$ взято

из примера 1, $r_5=1,65$ взято из табл. 10 ГОСТ 11.005—74.

Согласно табл. 5 и 9 ГОСТ 11.005—74 для верхней границы λ получают

$$\lambda_в=\frac{\bar{\lambda}}{r_4}=\frac{0,012}{0,64}=0,019.$$

По формуле (11) получают нижнюю доверительную границу для параметра a

$$a_н=\left(\frac{1}{0,019}\right)^{1/2}=7,25.$$

По формуле (12) получают верхнюю доверительную границу для параметра a

$$a_в=\left(\frac{1}{0,007}\right)^{1/2}=11,95.$$

Доверительный интервал для параметра a при доверительной вероятности $\gamma^*=0,95+0,95-1=0,90$.

$$(a_н, a_в)=(7,25;\ 11,95).$$

Пример 6. табл. 4 данного приложения даны результаты испытаний (в миллионах оборотов) 23 шариковых подшипников. Результаты испытаний расположены в порядке возрастания (вариационный ряд). Известно, что $c=0$, найти методом максимального правдоподобия оценки для параметров масштаба a и формы b.

Таблица 4

17,88	28,29	33,00	41,52	42,12	45,60
48,48	51,84	51,96	54,12	55,56	67,80
68,64	68,64	68,80	84,12	93,12	98,64
105,12	105,84	127,92	128,04	173,40	

Решение. Методом моментов находят оценку параметра формы b, которую берут за начальное приближение к корню b уравнения (1) приложения 1.

$$\bar{x}=\frac{1}{23}\sum_{i=1}^{23}x_i=72,22;$$

$$S=\sqrt{\frac{1}{22}\sum_{i=1}^{23}(x_i-72,22)^2}=37,49;$$

$$v_b=\frac{37,49}{72,22}=0,520.$$

Из табл. 1 для значения $v_b=0,523$ находят $\hat{b}_0=2,00$. Согласно формулам (4)—(7) приложения 1 вычисляют:

$$S_1=\sum_{i=1}^{23}\ln x_i=95,4587,$$

$$S_2^{(1)}=\sum_{i=1}^{23}x_i^2=150884,0368,$$

$$S_3^{(1)}=\sum_{i=1}^{23}x_i^2\ln x_i=695253,5375,$$

$$S_4^{(1)}=\sum_{i=1}^{23}x_i^2\ln^2 x_i=3230977,8093.$$

Далее согласно формуле (3) приложения 1 получают

$$\hat{b}_1=2+0,098=2,098.$$

Вычисляют второе приближение к корню уравнения (1) приложения 1

$$S_1=\sum_{i=1}^{23}\ln x_i=95,4587,$$

$$S_2^{(2)}=\sum_{i=1}^{23}x_i^{2,098}=237153,3668,$$

$$S_3^{(2)}=\sum_{i=1}^{23}x_i^{2,098}\cdot\ln x_i=1096940,4393,$$

$$S_4^{(2)}=\sum_{i=1}^{23}x_i^{2,098}\cdot\ln^2 x_i=5115475,3980.$$

Затем согласно формуле (3) приложения 1 получают:

$$\hat{b}_2=2,098+0,0037\approx2,098+0,004=2,102.$$

Поправка ко второму приближению равна 0,004 и менее 0,01. Если повторить аналогичные операции со вторым приближением, то получаемая поправка к третьему приближению менее чем 0,001. Поэтому в качестве корня уравнения (1) приложения 1 берут значение

$$\hat{b}=2,102.$$

Подставляя $\hat{b}=2,102$ в формулу (2) приложения 1, получают

$$\hat{a}=\left(\frac{\sum_{i=1}^{23}x_i^{2,102}}{23}\right)^{\frac{1}{2,102}}=81,78.$$

Используя табл. 1 приложения 1, находят несмещенную оценку для параметра формы b,

$$\tilde{b}=B(n)\cdot\hat{b}=0,940\cdot2,102=1,976,$$

откуда согласно формуле (2) приложения 1 получают

$$\tilde{a}=\left[\frac{\sum_{i=1}^{23}x_i^{1,976}}{23}\right]^{\frac{1}{1,976}}=81,99.$$

Пример 7.

Для данных примера 6 требуется найти:

1. Нижнюю и верхнюю доверительные границы для параметра формы b, если дано $\gamma_1=\gamma_2=0,95$.

2. Доверительный интервал для параметра формы b при доверительной вероятности $\gamma^*=0,90$.

3. Нижнюю и верхнюю доверительные границы для параметра масштаба a, если дано, что $\gamma_1=\gamma_2=0{,}95$.

4. Доверительный интервал для параметра масштаба a при доверительной вероятности $\gamma^*=0{,}90$.

Решение.

1. Для доверительной вероятности $\gamma_1=\gamma_2=0{,}95$ из табл. 2 для $n=23$ находят $l_н=1{,}405$; $l_в=0{,}801$ (здесь для получения $l_н$ и $l_в$ при $n=23$ использована линейная интерполяция).

Согласно формулам (14) и (16) получают

$$b_н=\frac{2{,}102}{1{,}405}=1{,}50,$$

$$b_в=\frac{2{,}102}{0{,}801}=2{,}62,$$

$\hat{b}=2{,}102$ корень уравнения (1) приложения 1, полученный согласно примера 6.

2. Значения $b_н=1{,}50$; $b_в=2{,}62$ образуют доверительный интервал для параметра формы b при доверительной вероятности

$$\gamma^*=\gamma_1+\gamma_2-1=0{,}95+0{,}95-1=0{,}90.$$

3. Для односторонней доверительной вероятности $\gamma_1=\gamma_2=0{,}95$ и объема выборки $n=23$ из табл. 3 находят $z_н=0{,}388$, $z_в=-0{,}394$ (здесь использована линейная интерполяция).

Находят корни уравнений (1) и (2) приложения 1: $\hat{b}=2{,}102$, $\hat{a}=81{,}78$ (см. пример 6).

Согласно формулам (18), (20) получают:

$$a_н=81{,}78\cdot e^{-0{,}388/2{,}102}=68{,}04;$$

$$a_в=81{,}78\cdot e^{0{,}394/2{,}102}=98{,}63.$$

4. Значения $a_н=68{,}04$, $a_в=98{,}63$ образуют доверительный интервал для параметра масштаба a при доверительной вероятности

$$\gamma^*=0{,}95+0{,}95-1=0{,}90.$$

Пример 8. В табл. 5 данного приложения приведено 10 наблюдений случайной величины X, подчиняющейся распределению Вейбулла. Найти оценку для параметра b, используя вероятность P_0 с целью использования данной оценки в качестве начального приближения к корню уравнения (1) или (20) приложения 1

Таблица 5

K	x_i	Накопленная частость $f_k=\frac{1}{10}\left(K-\frac{1}{2}\right)$	K	x_i	Накопленная частость $f_k=\frac{1}{10}\left(K-\frac{1}{2}\right)$
1	1,12	0,05	6	30,06	0,55
2	1,14	0,15	7	34,88	0,65
3	1,99	0,25	8	46,71	0,75
4	4,62	0,35	9	127,33	0,85
5	15,58	0,45	10	130,14	0,95

Решение. Находят $\bar{x}=\sum_{i=1}^{10} x_i=39{,}45$. В данном случае оценка для вероятности P_0 согласно табл. 5 данного приложения равна:

$$P_0=\text{Вер}\{x<\bar{x}\}=\text{Вер}\{x<39{,}49\}=0{,}65.$$

Из табл. 1 по значению $P_0=0{,}65$ находят оценку для параметра $b=0{,}90$, которую берут в качестве начального приближения корня уравнения (1) или (20) приложения 1.

Пример 9. Для данных примера 3 вычислить оценки для параметров сдвига и масштаба методом максимального правдоподобия.

Решение. Поскольку $0<b_0=1{,}2<2$, то согласно п. 4 приложения 1 в качестве оценки параметра сдвига берут минимальное значение x_{100}, (1) из наблюдений $x_1, x_2, \ldots, x_{100}$, в нашем случае x_{100} (1)$=0{,}027$, т. е. $c=0{,}027$. Далее согласно формуле (10) приложения 1 получают оценку для параметра масштаба

$$a=\left[\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100}(x_i-0{,}027)^{1{,}2}\right]^{\frac{1}{1{,}2}}=1{,}07.$$

Пример 10. В табл. 6 даны 20 результатов наблюдений случайной величины X, подчиняющейся распределению Вейбулла с известным значением параметра формы $b=3$. Найти метод максимального правдоподобия оценки для параметров масштаба a и сдвига c.

Решение. Согласно п. 5 приложения 1 вычисляют методом моментов оценки $\bar{a}$ и $\bar{c}$ для параметров a и c, которые берут за начальные приближения к корням уравнений (11), (12) приложения 1.

Таблица 6

2,863	3,188	1,607	1,614	2,381
3,600	2,001	2,114	2,170	3,625
3,177	3,696	2,352	3,171	3,150
3,083	1,972	2,375	3,194	2,435

Производя вычисления аналогично примеру 3, получают $\bar{x}=2{,}688$; $S=0{,}610$;

$$\bar{a}=\frac{0{,}610}{0{,}325}=1{,}877,$$

где $g_b=0{,}325$ взято из табл. 1 по заданному значению $b=3$;

$$\bar{c}=2{,}688-1{,}877\cdot 0{,}893=1{,}012,$$

где значение $K_b=0{,}893$ взято из табл. 1 по заданному значению $b=3$.

Согласно уравнениям (14)—(18) приложения 1 получают:

$$S_1^{(1)}=\sum_{i=1}^{20}\frac{1}{x_i-1{,}012}=14{,}025,$$

$$S_2^{(1)}=\sum_{i=1}^{20}\frac{1}{(x_i-1{,}012)^2}=12{,}589,$$

$$S_3^{(1)}=\sum_{i=1}^{20}(x_i-1,012)=34,518,$$

$$S_4^{(1)}=\sum_{i=1}^{20}(x_i-1,012)^2=67,467,$$

$$S_5^{(1)}=\sum_{i=1}^{20}(x_i-1,012)^3=142,511,$$

где $\hat{c}_0=\bar{c}=1,012$ взято в качестве начального приближения к корню уравнения (11) приложения 1.

Согласно формуле (13) приложения получают

$$\hat{c}_1=1,012+0,025=1,037.$$

Вычисляют второе приближение.

Согласно формулам (14)—(18) приложения 1 вычисляют

$$S_1^{(2)}=\sum_{i=1}^{20}\frac{1}{x_i-1,037}=14,349,$$

$$S_2^{(2)}=\sum_{i=1}^{20}\frac{1}{(x_i-1,037)^2}=13,346,$$

$$S_3^{(2)}=\sum_{i=1}^{20}(x_i-1,037)=34,018,$$

$$S_4^{(2)}=\sum_{i=1}^{20}(x_i-1,037)^2=65,753,$$

$$S_5^{(2)}=\sum_{i=1}^{20}(x_i-1,037)^3=137,515.$$

Далее согласно формуле (13) приложения 1 получают

$$\hat{c}_2=1,037+0,0008.$$

Поправка ко второму приближению менее чем 0,001, поэтому в качестве оценки параметра c берут значение $\hat{c}=1,037$. Согласно формуле (12) приложения 1 получают

$$\hat{a}=\left[\frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20}(x_i-1,037)^3\right]^{\frac{1}{3}}=1,90.$$

Пример 11. Пусть по результатам 50 наблюдений согласно формуле (10) получено

$$\rho_b = 2{,}345.$$

Пусть наименьшее значение из 50 наблюдений равно $x_{50}(1) = 1{,}12$. Найти оценки для параметров a, b, c распределения Вейбулла методом максимального правдоподобия.

Решение. По полученному значению $\rho_b = 2{,}345$ из табл. 1 находят оценку параметра b, $\overline{b} = 0{,}90$. Поскольку есть основания полагать, что параметр b удовлетворяет соотношению $0 < b \leqslant 2$, то в качестве оценки параметра сдвига, c берут наименьшее из наблюденных значений.

Таблица 7

Номер приближения K	S_1	$S_2^{(k)}$	$S_3^{(k)}$	$S_4^{(k)}$	Поправка к K-му приближению	Оценка параметра b
0	—	—	—	—	—	0,90
1	20,3367	1069,474	248,3571	4756,620	0,5074	0,393
2	20,3367	118,0595	31,3938	501,169	0,1257	0,519
3	20,3367	202,0162	51,0769	830,195	0,0530	0,574
4	20,3367	259,9838	63,6310	1103,5253	0,0230	0,551
5	20,3367	231,8311	58,0217	997,0065	0,0172	0,568
6	20,3367	249,3410	62,0769	1074,2655	0,0008	0,568

В нашем случае $\tilde{c} = x_{50}(1) = 1{,}12$. Далее согласно формулам (20), (3)—(7) приложения 1 находят оценку для параметра формы b. Значение $\overline{b} = 0{,}90$ берется в качестве начального приближения к корню уравнения (20) приложения 1. Результаты расчета, произведенные согласно формулам (3)—(7) и (20) приложения 1 вынесены в табл. 7 данного приложения. При этом слагаемое, обращающееся в бесконечность при $c = x_{50}(1) = 1{,}12$, опускается, т. е. все расчеты производятся по последним 49 наблюдениям вариационного ряда.

Таким образом оценка для параметра b равняется 0,568. Из уравнения (21) приложения 1 находят оценку для параметра a

$$\hat{a} = \left[\frac{1}{50}\sum_{i=1}^{50}(x_i - 1{,}12)^{0{,}568}\right]^{\frac{1}{0{,}568}} = 24{,}88.$$

Оценки для параметров a, b, c следующие:

$$\hat{a} = 24{,}88;\quad \hat{b} = 0{,}568 \approx 0{,}57;\quad \hat{c} = 1{,}12.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 3
Справочное

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ, УПОТРЕБЛЯЕМЫЕ В СТАНДАРТЕ

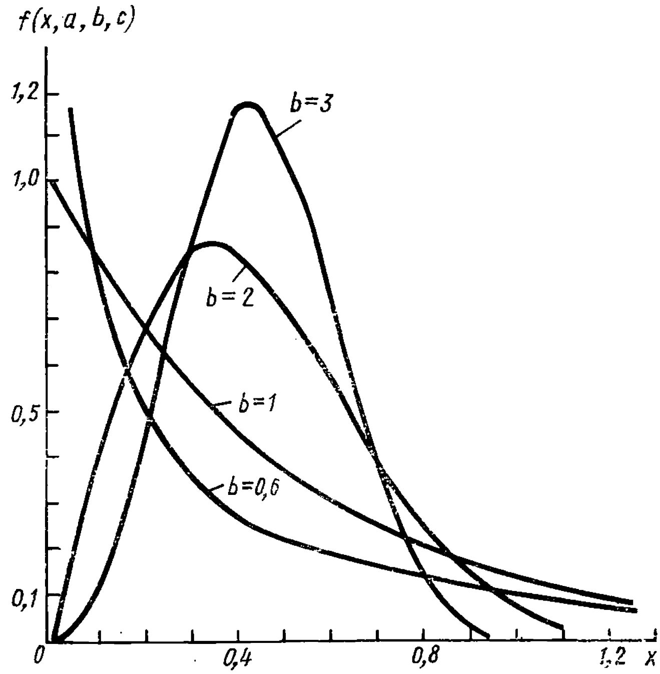
№ п/п.	Условное обозначение	Определение
1	a, b, c	Параметры масштаба, формы и сдвига распределения Вейбулла
2	$\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$	Оценки параметров a, b, c, полученные по методу моментов
3	$\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$	Оценки параметров a, b, c, полученные по методу максимального правдоподобия
4	$\tilde{b}$	Несмещенная оценка для параметра b, полученная по методу максимального правдоподобия
5	$B(n)$	Корректирующий множитель для получения несмещенной оценки параметра b при методе максимального правдоподобия
6	$\hat{b}_k$	k-е приближение к корню b уравнения правдоподобия
7	$\hat{b}_0$	Начальное приближение к корню b уравнения правдоподобия
8	γ_1	Одностороняя доверительная вероятность для получения нижней доверительной границы для параметров a и b
9	γ_2	Одностороняя доверительная вероятность для получения верхней доверительной границы для параметров a и b
10	γ^*	Доверительная вероятность для получения доверительного интервала для параметров a и b
11	$a_н(a_в)$	Нижняя (верхняя) доверительная граница для параметра a
12	$b_н(b_в)$	Нижняя (верхняя) доверительная граница для параметра b
13	$l_н(l_в)$	Коэффициенты для получения нижней (верхней) доверительной границы для параметра b
14	$z_н(z_в)$	Коэффициенты для получения нижней (верхней) доверительной границы для параметра a
15	v_b	Коэффициент вариации
16	ρ_b	Асимметрия

ПРИЛОЖЕНИЕ 4
Справочное

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ СТАНДАРТА

Распределение Вейбулла имеет большое применение в практике. Так данному распределению могут подчиняться пределы упругости и выносливости стали, некоторые характеристики надежности и т. д.

Графики плотности распределения, задаваемого формулой (1), представлены на чертеже для значений параметров $a=1$; $c=0$; $b=0{,}6$; $b=1$; $b=2$; $b=3$.



Графики плотности распределения Вейбулла для $a=1$, $c=0$; $b=0{,}6$; $b=1$; $b=2$; $b=3$.

Математическое ожидание μ и среднее квадратическое отклонение σ случайной величины X, подчиняющейся распределению Вейбулла, равны:

$$\mu=a\cdot K_b+c, \tag{1}$$

$$\sigma=a\cdot g_b, \tag{2}$$

где

$$K_b=\Gamma\left(1+\frac{1}{b}\right), \tag{3}$$

$$g_b=\sqrt{\Gamma\left(1+\frac{2}{b}\right)-K_b^2}, \tag{4}$$

$\Gamma(y)$ — гамма-функция

$$\Gamma(y)=\int\limits_0^{\infty} x^{y-1}e^{-x}dx. \qquad (5)$$

Коэффициент вариации v_b и асимметрия ρ_b равны:

$$v_b=\frac{\sigma}{\mu}=\frac{a\cdot g_b}{a\cdot K_b+c}, \qquad (6)$$

$$\rho_b=\frac{\Gamma\left(1+\frac{3}{b}\right)-3\cdot K_b\Gamma\left(1+\frac{2}{b}\right)+2K_b^3}{g_b^3}. \qquad (7)$$

Из уравнений (6) и (7) данного приложения видно, что коэффициент вариации и асимметрия при $c=0$ зависят только от параметра b, вследствие чего имеют место разд. 3, 4, 5 настоящего стандарта.

Функция правдоподобия имеет вид:

$$L(x_1,x_2,\ldots,x_n,a,b,c)=\left(\frac{b}{a}\right)^n\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-c}{a}\right)^{b-1}e^{-\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-c}{a}\right)^b}. \qquad (8)$$

Логарифмируя и приравнивая к нулю производные по a, b, c, получаем уравнения правдоподобия, приведенные в приложении 1.

При решении уравнений правдоподобия применялся метод Ньютона—Рафсона [6]:

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \qquad (9)$$

где x_k k-е приближение к корню уравнения $f(x)=0$.

Пусть $\hat{b}_{11}$ — оценка максимального правдоподобия для параметра b, когда выборка взята из распределения Вейбулла с параметрами $a=1$, $b=1$, $c=0$. Тогда $\hat{b}/b$ имеет распределение, независимо от a и b и такое же как оценка $\hat{b}_{11}$. В работе [6] методом Монте—Карло получено распределение оценки $\hat{b}_{11}$, откуда следует табл. 2 и пп. 7.1—7.3.

Пусть $\hat{a}_{11}$ — оценка максимального правдоподобия для параметра $\tilde{a}$, когда выборка взята из распределения Вейбулла с параметрами $a=1$, $b=1$, $c=0$. Тогда $\hat{b}\ln(\hat{a}/a)$ имеет распределение, независимое от a и b и такое же как $\hat{b}_{11}\ln(\hat{a}_{11})$. Распределение $\hat{b}_{11}\ln(\hat{a}_{11})$ получено методом Монте—Карло, откуда следует табл. 3 и пп. 7.4—7.6.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вейбулл В. Усталостные испытания и анализ их результатов. М., «Машиностроение», 1964.

2. Шор Я. Б. Статистические методы анализа и контроля качества и надежности. М., «Советское радио», 1962.

3. Шор Я. Б., Кузьмин Ф. И. Таблицы для анализа и контроля надежности. М., «Советское радио», 1968.

4. Dubey S. D. Some Simple Estimators for the Shape Parameter of the weibull laws. Naval research logistics quartely. 1967, v. 14, pp. 489—512.

5. Груничев А. С., Михайлов А. И., Шор Я. Б. Таблицы для расчетов надежности при распределении Вейбулла. М., Изд-во стандартов, 1974.

6. Thoman D. R., Bain L. I., Antle C. E. Inferences on the Parameters of the weibull Distribution. Technometrics. 1969, v. 14, N 3, pp. 445—460.

7. Введение в теорию порядковых статистик. Под ред. А. М. Боярского. М., «Статистика», 1970.

Редактор *А. В. Циганкова*
Технический редактор *Л. Я. Митрофанова*
Корректор *Н. Д. Чехотина*

Сдано в набор 23.02.78 Подп. в печ. 06.07.78 2,0 п. л. 2,24 уч.-изд. л. Тир. 6000 Цена 10 коп.

Ордена «Знак Почета» Издательство стандартов. Москва, Д-557, Новопресненский пер., 3
Калужская типография стандартов, ул. Московская, 256. Зак. 691