ГОСУДАРСТВЕННЫЙ СТАНДАРТ
СОЮЗА ССР

ПРИКЛАДНАЯ СТАТИСТИКА

ПРАВИЛА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОЦЕНОК И ДОВЕРИТЕЛЬНЫХ ГРАНИЦ ДЛЯ ПАРАМЕТРОВ ГАММА-РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

ГОСТ 11.011—83

Издание официальное

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ СССР ПО СТАНДАРТАМ
Москва

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ СТАНДАРТ
СОЮЗА ССР

ПРИКЛАДНАЯ СТАТИСТИКА

ПРАВИЛА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОЦЕНОК И ДОВЕРИТЕЛЬНЫХ ГРАНИЦ ДЛЯ ПАРАМЕТРОВ ГАММА-РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

ГОСТ 11.011—83

Издание официальное

МОСКВА — 1985

УДК 519.2 : 658.562 : 006.354 Группа Т59

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ СТАНДАРТ СОЮЗА ССР

Прикладная статистика

ПРАВИЛА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОЦЕНОК И ДОВЕРИТЕЛЬНЫХ ГРАНИЦ ДЛЯ ПАРАМЕТРОВ ГАММА-РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Applied statistics. Regulations for determination of estimates and confidence limits for parameters of gamma distribution

ГОСТ 11.011—83

ОКП 0021

Постановлением Государственного комитета СССР по стандартам от 27 июня 1983 г. № 2684 срок введения установлен

с 01.01.85

Настоящий стандарт устанавливает правила определения оценок и доверительных границ для параметров гамма-распределения по совокупности результатов независимых наблюдений, полученных в процессе анализов, испытаний, измерений и т. д., если исследуемые случайные величины подчиняются гамма-распределению. Проверка согласия опытного распределения этих наблюдений с теоретическим гамма-распределением — по ГОСТ 11.006—74.

1. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ГАММА-РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

1.1. Распределение случайной величины X называется гамма-распределением, если плотность вероятности имеет вид

$$f(x,\ a,\ b,\ c)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(a)}(x-c)^{a-1}b^{-a}\exp\left\{-\dfrac{x-c}{b}\right\}, & \text{если } x\geqslant c,\\ 0, & \text{если } x<c.\end{cases} \qquad (1)$$

Плотность вероятности $f(x;\ a,\ b,\ c)$ определяется тремя параметрами $a,\ b,\ c$, где $a>0$, $b>0$. При этом a является параметром формы, b — параметром масштаба, c — параметром сдвига. Множитель $\dfrac{1}{\Gamma(a)}$ является нормировочным, $\Gamma(a)$ — гамма-функция,

$$\Gamma(a)=\int\limits_0^\infty x^{a-1}\ e^{-x}dx. \qquad (2)$$

1.2. Частные случаи гамма-распределения при определенных значениях параметров имеют специальные названия. При $a=1$

Переиздание. Февраль 1984 г.

2—812

имеем экспоненциальное распределение (ГОСТ 11.005—74). При натуральном a и $c=0$ гамма-распределение — распределение Эрланга. Если случайная величина X имеет гамма-распределение с параметром формы a таким, что $\nu=2a$ — целое число, $b=1$ и $c=0$, то $2X$ имеет распределение хи-квадрат (χ^2) с ν степенями свободы.

1.3. Гамма-распределение имеет следующие характеристики:
математическое ожидание $E(X)=ab+c$;
дисперсию $D(X)=\sigma^2=ab^2$;

коэффициент вариации $v=\dfrac{\sigma}{E(X)}=\dfrac{b\sqrt{a}}{ab+c}$;

асимметрию $\dfrac{E(X-E(X))^3}{\sigma^3}=\dfrac{2}{\sqrt{a}}$;

эксцесс $\dfrac{E(X-E(X))^4}{\sigma^4}-3=\dfrac{6}{a}$;

характеристическую функцию

$$Ee^{itX}=e^{itc}(1-ibt)^{-a}.$$

2. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТОЧЕЧНЫХ ОЦЕНОК И ДОВЕРИТЕЛЬНЫХ ГРАНИЦ

2.1. Точечные оценки и доверительные границы для параметров гамма-распределения определяются по полной выборке объема n из гамма-распределения, т. е. по совокупности результатов наблюдений $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которые рассматриваются как независимые одинаково распределенные случайные величины, имеющие гамма-распределение.

Для получения оценок и доверительных границ используются метод моментов, метод максимального правдоподобия и метод наилучших асимптотически нормальных оценок (полученных из оценок метода моментов одной итерацией при решении по методу Ньютона—Рафсона системы уравнений максимального правдоподобия).

2.2. Стандарт устанавливает правила определения точечных оценок и доверительных границ как при известном параметре сдвига c, так и при неизвестном параметре сдвига.

Если параметр сдвига известен, то, вычитая из наблюдений известное число c, получаем полную выборку объема n из гамма-распределения с параметром сдвига $c=0$. Поэтому правила настоящего стандарта устанавливаются для случая $c=0$ (разд. 3—

7). Правила определения точечных оценок и доверительных границ при неизвестном параметре сдвига c приведены в разд. 8.

Примечание. В отдельных случаях допускается использование правил, отличных от указанных в данном стандарте, если они больше соответствуют специфике рассматриваемой области.

2.3. Стандарт устанавливает правила определения точечных оценок параметров a, b гамма-распределения для следующих случаев ($c=0$):

оценка параметра масштаба при известном параметре формы;
оценка параметра формы при известном параметре масштаба;
оценка обоих неизвестных параметров.

2.4. В случае двух неизвестных параметров ($c=0$) стандарт предусматривает использование двух методов — метода максимального правдоподобия и метода моментов. Метод выбирают в соответствии с правилами, установленными в разд. 5. При одном неизвестном параметре (масштаба или формы) используют метод максимального правдоподобия.

2.5. Стандарт устанавливает правила определения доверительных границ для параметров формы и масштаба гамма-распределения в следующих случаях ($c=0$):

1) доверительные границы параметра масштаба b при известном параметре формы a;

2) доверительные границы параметра формы a при известном параметре масштаба b;

3) доверительные границы параметра формы a при неизвестном параметре масштаба b;

4) доверительные границы параметра масштаба b при неизвестном параметре a.

2.6. В случаях 2), 3), 4) п. 2.5, а также при неизвестном параметре сдвига доверительные границы определяют на основе асимптотической нормальности соответствующих точечных оценок, поэтому их можно применять лишь при объеме выборки $n \geq 10$.

2.7. Верхние доверительные границы $a_в$, $b_в$, соответствующие доверительной вероятности $1 - \alpha_в$, вычисляют из условий:

$$P(a < a_в) = 1 - \alpha_в, \quad (3)$$

$$P(b < b_в) = 1 - \alpha_в. \quad (4)$$

2.8. Нижние доверительные границы $a_н$, $b_н$ для параметров a, b соответственно при доверительной вероятности $1 - \alpha_н$ вычисляют из условий:

$$P(a > a_н) = 1 - a_н, \quad (5)$$

$$P(b > b_н) = 1 - \alpha_н. \quad (6)$$

2.9. Если $a_н$, $a_в$ и $b_н$, $b_в$ определены в соотвествии с пп. 2.7; 2.8, то

$$P(a_н<a<a_в)=1-\alpha_н-\alpha_в, \quad (7)$$

$$P(b_н<b<b_в)=1-\alpha_н-\alpha_в, \quad (8)$$

т. е. доверительные интервалы $[a_н, a_в]$ и $[b_н, b_в]$ накрывают истинные значения параметров a, b соответственно с доверительной вероятностью $1-\alpha_н-\alpha_в$. В частности, если $\alpha_н=\alpha_в=\alpha$, т. е. односторонние границы соответствуют доверительной вероятности $1-\alpha$, то двусторонний доверительный интервал соответствует доверительной вероятности $1-2\alpha$. Если двусторонний доверительный интервал должен соответствовать доверительной вероятности $1-\beta$, следует брать в качестве его концов односторонние (нижнюю и верхнюю) доверительные границы, соответствующие доверительной вероятности $1-\beta/2$.

2.10. Значения доверительной вероятности $(1-\alpha)$ — по ГОСТ 11.001—73.

Примечание. Наиболее часто используются значения $\alpha=0{,}01$; 0,05; 0,1.

2.11. Примеры применения правил стандарта даны в справочном приложении 1. Свойства гамма-распределения и правила оценивания ряда его характеристик приведены в справочном приложении 2. Теоретические основы стандарта описаны в справочном приложении 3. Условные обозначения, употребляемые в стандарте, содержатся в справочном приложении 4.

3. ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРА МАСШТАБА ПРИ ИЗВЕСТНЫХ ПАРАМЕТРАХ ФОРМЫ И СДВИГА

3.1. Точечную оценку b^* параметра b при известном параметре a вычисляют по формуле

$$b^*=\frac{1}{na}\sum_{i=1}^{n}x_i. \quad (9)$$

3.2. Нижнюю доверительную границу $b_н$, соответствующую доверительной вероятности $1-\alpha$, вычисляют по формуле

$$b_н=r_1(\alpha, na)\,b^*. \quad (10)$$

При $m=1\div1000$ значения $r_1(\alpha, m)$ берут из табл. 1 $(m=na)$.

Таблица 1

m	$r_1(\alpha, m)$ при α					
	0,001	0,01	0,025	0,05	0,1	0,2
1	0,14	0,22	0,27	0,33	0,43	0,62
2	0,22	0,30	0,36	0,42	0,51	0,67
3	0,27	0,36	0,42	0,48	0,57	0.70
4	0,31	0,40	0,46	0,52	0,60	0,73
5	0,34	0,43	0,49	0,55	0,62	0,75
6	0,37	0,46	0,51	0,57	0,65	0,76
7	0,39	0,48	0,54	0,59	0,66	0,77
8	0,41	0,50	0,56	0,61	0,68	0,78
9	0,43	0,52	0,57	0,62	0,69	0,79
10	0,44	0,53	0,59	0,64	0,70	0,80
11	0,46	0,55	0,60	0,65	0,71	0,80
12	0,47	0,56	0,61	0,66	0,72	0,81
13	0,48	0,57	0,62	0,67	0,73	0,82
14	0,49	0,58	0,63	0,68	0,74	0,82
15	0,50	0,59	0,64	0,68	0,74	0,83
16	0,51	0,60	0,65	0,69	0,75	0,83
18	0,53	0,61	0,66	0,71	0,76	0,84
20	0,55	0,63	0,67	0,72	0,77	0,85
25	0,58	0,66	0,70	0,74	0,79	0,86
30	0,60	0,68	0,72	0,76	0,80	0,87
40	0,64	0,71	0,75	0,78	0,83	0,88
50	0,67	0,74	0,77	0,80	0,84	0,89
60	0,70	0,76	0,79	0,82	0,86	0,90
70	0,71	0,77	0,80	0,83	0,87	0,91
80	0,73	0,78	0,81	0,84	0,87	0,91
90	0,74	0,79	0,82	0,85	0,88	0,92
100	0,75	0,80	0,83	0,86	0,88	0,92
150	0,79	0.84	0,86	0,88	0,90	0,93
200	0,81	0,86	0,87	0,89	0,92	0,94
250	0,83	0,87	0,89	0,90	0,92	0,95
300	0,84	0,88	0,90	0,91	0,93	0,95
400	0,86	0,89	0,91	0,92	0,94	0,96
500	0,88	0,90	0,92	0,93	0,94	0,96
600	0,89	0,91	0,92	0,94	0,95	0,97
800	0,90	0,92	0,93	0,94	0,96	0,97
1000	0,91	0,93	0,94	0,95	0,96	0,97

3.3. Верхнюю доверительную границу $b_в$, соответствующую доверительной вероятности $1 - \alpha$, вычисляют по формуле

$$b_в = r_2(\alpha,\ na)\, b^*. \qquad (11)$$

При $m = 1 \div 1000$ значения $r_2\ (\alpha,\ m)$ приведены в табл. 2 ($m = na$).

3.4. Если значение $m = na \leqslant 100$ не содержится в табл. 1, 2, применяют линейную интерполяцию (в соответствии с разд. 9).

Таблица 2

m	$r_2(\alpha, m)$ при α					
	0,001	0,01	0,025	0,05	0,1	0,2
1	1000	100	39,52	19,5	9,48	4,48
2	44,05	13,5	8,26	5,63	3,77	2,42
3	15,75	6,88	4,85	3,66	2,73	1,95
4	9,33	4,85	3,67	2,93	2,29	1,74
5	6,78	3,91	3,07	2,54	2,05	1,62
6	5,42	3,36	2,72	2,29	1,90	1,54
7	4,60	3,00	2,48	2,13	1,80	1,48
8	4,06	2,75	2,32	2,01	1,72	1,43
9	3,67	2,57	2,18	1,92	1,66	1,40
10	3,38	2,42	2,09	1,83	1,61	1,37
11	3,15	2,31	2,00	1,78	1,57	1,34
12	2,97	2,21	1,94	1,73	1,53	1,33
13	2,82	2,13	1,88	1,69	1,50	1,31
14	2,69	2,06	1,83	1,65	1,47	1,29
15	2,59	2,01	1,79	1,62	1,46	1,28
16	2,50	1,96	1,75	1,59	1,44	1,27
18	2,35	1,87	1,69	1,55	1,40	1,25
20	2,23	1,81	1,64	1,51	1,37	1,24
25	2,03	1,68	1,55	1,44	1,33	1,21
30	1,89	1,60	1,48	1,39	1,29	1,18
40	1,72	1,50	1,40	1,32	1,24	1,16
50	1,65	1,43	1,35	1,28	1,21	1,14
60	1,56	1,38	1,31	1,25	1,19	1,12
70	1,51	1,35	1,28	1,23	1,18	1,11
80	1,47	1,32	1,27	1,21	1,16	1,10
90	1,44	1,30	1,25	1,20	1,15	1,09
100	1,39	1,28	1,23	1,19	1,14	1,09
150	1,30	1,22	1,18	1,15	1,12	1,07
200	1,26	1,19	1,15	1,13	1,10	1,06
250	1,23	1,17	1,14	1,11	1,09	1,06
300	1,21	1,15	1,12	1,10	1,08	1,05
400	1,18	1,13	1,11	1,09	1,07	1,04
500	1,16	1,11	1,09	1,08	1,06	1,04
600	1,14	1,10	1,08	1,07	1,05	1,04
800	1,12	1,09	1,07	1,06	1,05	1,03
1000	1,11	1,08	1,06	1,05	1,04	1,03

3.5. При $m \geqslant 100$ значения $r_1(\alpha, m)$ и $r_2(\alpha, m)$ для m, не содержащегося в табл. 1, 2, вычисляют по формулам:

$$r_1(\alpha, m) = \frac{4m}{\left(\sqrt{4m-1}+u_\alpha\right)^2}, \qquad (12)$$

$$r_2(\alpha, m) = \frac{4m}{\left(\sqrt{4m-1}-u_\alpha\right)^2}, \qquad (13)$$

где u_α — квантиль стандартного нормального распределения с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1, соответствующая доверительной вероятности $1-\alpha$:

$$\int_{-\infty}^{u_\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\} dy = 1-\alpha. \quad (14)$$

Значения u_α приведены в табл. 3.

Таблица 3

α	u_α	α	u_α
0,001	3,090	0,025	1,960
0,0025	2,807	0,05	1,645
0,005	2,576	0,1	1,282
0,01	2,326	0,2	0,842

4. ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРА ФОРМЫ ПРИ ИЗВЕСТНЫХ ПАРАМЕТРАХ МАСШТАБА И СДВИГА

4.1. Точечную оценку a^* параметра формы a при известном значении параметра масштаба b вычисляют по формуле

$$a^* = G\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{x_i}{b}\right)\right]. \quad (15)$$

При этом сначала вычисляют величину

$$x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{x_i}{b}\right). \quad (16)$$

Затем по x находят a^* в соответствии с пп. 4.2—4.4.

4.2. При $-5{,}0 \leqslant x \leqslant 1{,}9$ значение a^* определяют по x с помощью табл. 4, в которой приведены значения функции $G(x)$.

Если значение x, найденное по формуле (16), попадает между двумя значениями x в табл. 4, то при $x \geqslant -0{,}5$ применяют линейную интерполяцию, а при $x < -0{,}5$ — дробно-линейную интерполяцию (в соответствии с разд. 9).

Таблица 4

x	$G(x)$	x	$G(x)$	x	$G(x)$	x	$G(x)$
—5,0	0,2116	—3,2	0,3267	—1,4	0,6407	0,4	1,9650
—4,9	0,2159	—3,1	0,3365	—1,3	0,6725	0,5	2,1249
—4,8	0,2205	—3,0	0,3468	—1,2	0,7073	0,6	2,3000
—4,7	0,2252	—2,9	0,3579	—1,1	0,7444	0,7	2,4936
—4,6	0,2302	—2,8	0,3694	—1,0	0,7848	0,8	2,7075
—4,5	0,2351	—2,7	0,3817	—0,9	0,8289	0,9	2,9340
—4,4	0,2403	—2,6	0,3947	—0,8	0,8768	1,0	3,2031
—4,3	0,2458	—2,5	0,4085	—0,7	0,9291	1,1	3,4905
—4,2	0,2516	—2,4	0,4231	—0,6	0,9862	1,2	3,8078
—4,1	0,2576	—2,3	0,4389	—0,5	1,0486	1,3	4,1582
—4,0	0,2639	—2,2	0,4557	—0,4	1,1168	1,4	4,5455
—3,9	0,2705	—2,1	0,4734	—0,3	1,1914	1,5	4,9728
—3,8	0,2774	—2,0	0,4926	—0,2	1,2733	1,6	5,4448
—3,7	0,2846	—1,9	0,5130	—0,1	1,3630	1,7	5,9667
—3,6	0,2922	—1,8	0,5349	0	1,4617	1,8	6,5433
—3,5	0,3002	—1,7	0,5586	0,1	1,5701	1,9	7,1795
—3,4	0,3086	—1,6	0,5839	0,2	1,6893		
—3,3	0,3174	—1,5	0,6112	0,3	1,8205		

4.3. При $-10,0 \leqslant x < -5,0$ используют формулу

$$a^* = \frac{x + 0,556 + \sqrt{(x+0,556)^2+5,327}}{2,663}. \qquad (17)$$

При $x < -10,0$ используют формулу

$$a^* = \frac{1}{-x-0,4238}. \qquad (18)$$

При $x < -75,0$ разрешается использовать вместо (18) более простую формулу

$$a^* = -\frac{1}{x}. \qquad (19)$$

4.4. При $x > 1,9$ следует использовать формулу

$$a^* = e^x + 0,5. \qquad (20)$$

4.5. Для построения доверительных границ следует вычислить оценку $\sigma^*(a^*)$ среднего квадратического отклонения оценки a^* параметра a, определенной в соответствии с п. 4.1, по формуле

$$\sigma^*(a^*) = \frac{1}{\sqrt{nI(a^*)}}, \qquad (21)$$

где $I(a^*)$ определяют по a^* в соответствии с пп. 4.6—4.8.

Таблица 5

a	$I(a)$	a	$I(a)$	a	$I(a)$	a	$I(a)$
0,20	26,2674	1,28	1.1587	1,72	0,7813	2,80	0,4284
0,30	12,2454	1,30	1,1343	1,74	0,7698	2,90	0,4110
0,40	7,2754	1,32	1,1108	1,76	0,7585	3,00	0,3949
0,50	4,9348	1,34	1,0882	1,78	0,7476	3,10	0,3802
0,60	3,6361	1,36	1.0664	1,80	0,7370	3,20	0,3664
0,70	2,8340	1,38	1,0455	1,82	0,7266	3,30	0,3536
0,80	2,2995	1,40	1,0254	1,84	0,7166	3,40	0,3416
0,90	1,9226	1,42	1,0059	1,86	0,7068	3,50	0,3304
1,00	1,6449	1,44	0,9872	1,88	0,6973	3,60	0,3199
1,02	1,5981	1,46	0,9691	1,90	0,6880	3,70	0,3100
1,04	1,5537	1,48	0,9517	1,92	0,6789	3,80	0,3008
1,06	1,5115	1,50	0,9348	1,94	0,6701	3,90	0,2921
1,08	1,4715	1,52	0,9185	1,96	0,6615	4,00	0,2838
1,10	1,4333	1,54	0,9027	1,98	0,6531	4,10	0,2761
1,12	1,3970	1,56	0,8875	2,00	0,6449	4,20	0,2688
1,14	1,3623	1,58	0,8727	2,10	0,6069	4,30	0,2616
1,16	1,3292	1,60	0,8584	2,20	0,5730	4,40	0,2551
1,18	1,2976	1,62	0,8446	2,30	0,5426	4,50	0,2488
1,20	1,2674	1,64	0,8321	2,40	0,5152	4,60	0,2427
1,22	1,2385	1,66	0,8181	2,50	0,4904	4,70	0,2370
1,24	1,2107	1,68	0,8055	2,60	0,4678	4,80	0,2315
1,26	1,1842	1,70	0,7932	2,70	0,4472	4,90	0,2264
						5,00	0,2213

4.6. При $0{,}20 \leqslant a^* \leqslant 5{,}0$ значение $I(a^*)$ определяют по a^* с помощью табл. 5. Если значение a^* попадает между двумя значениями a в табл. 5, то применяют дробно-линейную интерполяцию (в соответствии с разд. 9).

Примечание. Для определения $I(a^*)$ при a^*, не содержащемся в табл. 5, может быть использована рекуррентная формула

$$I(a) = I(a-1) - \frac{1}{(a-1)^2}. \qquad (22)$$

4.7. При $a^* < 0{,}20$ применяют формулу

$$I(a^*) = 1{,}6449 + \frac{1}{(a^*)^2}. \qquad (23)$$

4.8. При $5{,}0 < a^* < 10{,}0$ применяют формулу

$$I(a^*) = \frac{1}{a^* - 0{,}5} - \frac{1}{12(a^* - 0{,}5)^3}. \qquad (24)$$

При $a^* > 10{,}0$ применяют формулу

$$I(a^*) = \frac{1}{a^* - 0{,}5}. \qquad (25)$$

4.9. Верхнюю доверительную границу $a_в$, соответствующую доверительной вероятности $1-\alpha$, вычисляют по формуле

$$a_в = a^* + u_\alpha \sigma^*(a^*), \qquad (26)$$

где a^* находят в соответствии с п. 4.1, $\sigma^*(a^*)$ — по п. 4.5, квантиль u_α стандартного нормального распределения, соответствующая доверительной вероятности $1-\alpha$, приведена в табл. 3.

4.10. Нижнюю доверительную границу $a_н$, соответствующую доверительной вероятности $1-\alpha$, вычисляют по формуле

$$a_н = a^* - u_\alpha \sigma^*(a^*), \qquad (27)$$

где a^*, u_α, $\sigma^*(a^*)$ — те же, что и в п. 4.9.

Примечание. Если нижняя доверительная граница $a_н$, вычисленная по формуле (27), отрицательна, то полагают $a_н=0$.

4.11. Двусторонние доверительные границы определяют в соответствии с п. 2.9.

5. ВЫБОР МЕТОДА ОЦЕНИВАНИЯ ПРИ НЕИЗВЕСТНЫХ ПАРАМЕТРАХ ФОРМЫ И МАСШТАБА И ИЗВЕСТНОМ ПАРАМЕТРЕ СДВИГА

5.1. Метод оценивания выбирают в зависимости от величины относительной или абсолютной погрешности наблюдений, объема выборки и оценки параметра формы.

5.2. Оценку $\hat{a}$ параметра формы a, используемую при выборе метода оценивания, определяют методом моментов по следующему алгоритму:

вычисляют среднее арифметическое $\bar{x}$ наблюдений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ по формуле

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i; \qquad (28)$$

вычисляют выборочную дисперсию s^2 наблюдений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ по формуле

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2; \qquad (29)$$

вычисляют оценку $\hat{a}$ параметра формы a по формуле

$$\hat{a} = \frac{(\bar{x})^2}{s^2}. \qquad (30)$$

5.3. При известной относительной погрешности наблюдений δ метод оценивания выбирают следующим образом:

по оценке $\hat{a}$ параметра формы, определенной в соответствии с п. 5.2, вычисляют величину

$$A=\hat{a}\left(2\hat{a}-3\sqrt{\hat{a}}\right); \qquad (31)$$

по относительной погрешности наблюдений δ и объему выборки n вычисляют величину

$$B=\frac{0,53}{\delta\sqrt{n}}; \qquad (32)$$

если $A>B$, то точечные оценки и доверительные границы определяют по методу моментов (разд. 6);

если $A\leqslant B$, то применяют метод максимального правдоподобия (разд. 7).

5.4. При известной абсолютной погрешности Δ применяют правила п. 5.3 с величиной δ, вычисленной по формуле

$$\delta=\frac{\Delta}{\bar{x}}, \qquad (33)$$

где $\bar{x}$ определяют по п. 5.2.

6. ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ ФОРМЫ И МАСШТАБА МЕТОДОМ МОМЕНТОВ ПРИ ИЗВЕСТНОМ ПАРАМЕТРЕ СДВИГА

6.1. Точечную оценку $\hat{a}$ параметра формы a определяют в соответствии с п. 5.2.

6.2. Точечную оценку $\hat{b}$ параметра масштаба b вычисляют по формуле

$$\hat{b}=\frac{\bar{x}}{\hat{a}}, \qquad (34)$$

где $\bar{x}$ и $\hat{a}$ определяют в соответствии с п. 5.2.

6.3. Для определения доверительных границ параметра формы следует вычислить оценку $\hat{\sigma}(\hat{a})$ среднего квадратического отклонения оценки $\hat{a}$ параметра a, определенной в соответствии с п. 6.1, по формуле

$$\hat{\sigma}(\hat{a})=\sqrt{\frac{2\hat{a}(\hat{a}+1)}{n}}. \qquad (35)$$

6.4. Верхнюю доверительную границу $a_в$, соответствующую доверительной вероятности 1 — α, вычисляют по формуле

$$a_в = \hat{a} + u_\alpha \hat{\sigma}(\hat{a}), \qquad (36)$$

где $\hat{a}$ определяют в соответствии с п. 5.2 $\hat{\sigma}(\hat{a})$ — с п. 6.3, квантиль u_α стандартного нормального распределения, соответствующая доверительной вероятности 1 — α, приведена в табл. 3.

6.5. Нижнюю доверительную границу $a_н$, соответствующую доверительной вероятности 1 — α, вычисляют по формуле

$$a_н = \hat{a} - u_\alpha \hat{\sigma}(\hat{a}), \qquad (37)$$

где $\hat{a}$, $\hat{\sigma}(\hat{a})$ и u_α — те же, что и в п. 6.4.

Примечание. Если нижняя доверительная граница $a_н$, вычисленная по формуле (37), отрицательна, то полагают $a_н = 0$.

6.6. Для определения доверительных границ параметра масштаба b следует вычислить оценку $\hat{\sigma}(\hat{b})$ среднего квадратического отклонения оценки $\hat{b}$ параметра b, определенной в соответствии с п. 6.2. Величину $\hat{\sigma}(\hat{b})$ вычисляют по формуле

$$\hat{\sigma}(\hat{b}) = \frac{\hat{b}}{\sqrt{n}} \sqrt{2 + \frac{3}{\hat{a}}}, \qquad (38)$$

где $\hat{a}$ определяют в соответствии с п. 5.4.

6.7. Верхнюю доверительную границу $b_в$, соответствующую доверительной вероятности 1 — α, вычисляют по формуле

$$b_в = \hat{b} + u_\alpha \hat{\sigma}(\hat{b}), \qquad (39)$$

где $\hat{b}$ определяют в соответствии с п. 6.2, $\hat{\sigma}(\hat{b})$ — по п. 6.6, квантиль u_α стандартного нормального распределения, соответствующая доверительной вероятности 1 — α, приведена в табл. 3.

6.8. Нижнюю доверительную границу $b_н$, соответствующую доверительной вероятности 1 — α, вычисляют по формуле

$$b_н = \hat{b} - u_\alpha \hat{\sigma}(\hat{b}), \qquad (40)$$

где $\hat{b}$, $\hat{\sigma}(\hat{b})$ и u_α — те же, что и в п. 6.7.

Примечание. Если нижняя доверительная граница $b_н$, вычисленная по формуле (40), отрицательна, то полагают $b_н = 0$.

6.9. Двусторонние доверительные границы для параметров формы a и масштаба b определяют в соответствии с п. 2.9.

7. ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ ФОРМЫ И МАСШТАБА МЕТОДОМ МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ ПРИ ИЗВЕСТНОМ ПАРАМЕТРЕ СДВИГА

7.1. Точечную оценку a^* параметра формы a определяют по следующему алгоритму:

вычисляют

$$x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{\bar{x}}{x_i}\right), \tag{41}$$

где $\bar{x}$ — среднее арифметическое наблюдений x, x_2, ..., x_n ($\bar{x}$ определяют по п. 5.2);

вычисляют оценку a^* по формуле

$$a^* = H(x), \tag{42}$$

в соответствии с пп. 7.2; 7.3.

7.2. При $x \geqslant 0{,}25$ значение a^* определяют по x с помощью табл. 6. Если значение x, вычисленное в соответствии с п. 7.1, попадает между двумя значениями x в табл. 6, то применяют дробно-линейную интерполяцию (в соответствии с разд. 9).

Таблица 6

x	$H(x)$	x	$H(x)$	x	$H(x)$	x	$H(x)$
0,010	50,17	0,030	16,83	0,050	10,16	0,070	7,31
0,011	45,63	0,031	16,29	0,051	9,97	0,071	7,21
0,012	41,84	0,032	15,79	0,052	9,78	0,072	7,11
0,013	38,63	0,033	15,32	0,053	9,60	0,073	7,01
0,014	35,88	0,034	14,87	0,054	9,42	0,074	6,92
0,015	33,51	0,035	14,45	0,055	9,25	0,075	6,83
0,016	31,42	0,036	14,05	0,056	9,09	0,076	6,74
0,017	29,59	0,037	13,68	0,057	8,94	0,077	6,66
0,018	27,94	0,038	13,32	0,058	8,78	0,078	6,57
0,019	26,49	0,039	12,99	0,059	8,64	0,079	6,49
0,020	25,17	0,040	12,66	0,060	8,50	0,080	6,41
0,021	23,98	0,041	12,36	0,061	8,36	0,081	6,34
0,022	22,90	0,042	12,07	0,062	8,23	0,082	6,26
0,023	21,91	0,043	11,79	0,063	8,10	0,083	6,19
0,024	21,00	0,044	11,53	0,064	7,98	0,084	6,11
0,025	20,17	0,045	11,28	0,065	7,86	0,085	6,04
0,026	19,40	0,046	11,03	0,066	7,74	0,086	5,98
0,027	18,68	0,047	10,80	0,067	7,63	0,087	5,91
0,028	18,02	0,048	10,58	0,068	7,52	0,088	5,84
0,029	17,41	0,049	10,37	0,069	7,41	0,089	5,78

Продолжение табл. 6

x	$H(x)$	x	$H(x)$	x	$H(x)$	x	$H(x)$
0,090	5,72	0,37	1,50	0,74	0,802	2,1	0,3242
0,091	5,66	0,38	1,46	0,75	0,792	2,2	0,3115
0,092	5,60	0,39	1,43	0,76	0,783	2,3	0,2999
0,093	5,54	0,40	1,39	0,77	0,774	2,4	0,2891
0,094	5,48	0,41	1,36	0,78	0,765	2,5	0,2791
0,095	5,42	0,42	1,33	0,79	0,757	2,6	0,2698
0,096	5,37	0,43	1,30	0,80	0,748	2,7	0,2612
0,097	5,32	0,44	1,28	0,81	0,740	2,8	0,2532
0,098	5,26	0,45	1,25	0,82	0,732	2,9	0,2456
0,099	5,21	0,46	1,23	0,83	0,725	3,0	0,2386
0,10	5,16	0,47	1,20	0,84	0,717	3,1	0,2321
0,11	4,71	0,48	1,18	0,85	0,710	3,2	0,2258
0,12	4,33	0,49	1,16	0,86	0,702	3,3	0,2197
0,13	4,01	0,50	1,14	0,87	0,695	3,4	0,2141
0,14	3,73	0,51	1,12	0,88	0,688	3,5	0,2089
0,15	3,49	0,52	1,10	0,89	0,682	4,0	0,1861
0,16	3,28	0,53	1,08	0,90	0,675	4,5	0,1680
0,17	3,10	0,54	1,06	0,91	0,668	5,0	0,1532
0,18	2,93	0,55	1,04	0,92	0,662	6,0	0,1306
0,19	2,79	0,56	1,03	0,93	0,656	7,0	0,1141
0,20	2,66	0,57	1,01	0,94	0,650	8,0	0,1013
0,21	2,54	0,58	0,996	0,95	0,644	9,0	0,0913
0,22	2,43	0,59	0,981	0,96	0,638	10,0	0,0831
0,23	2,33	0,60	0,966	0,97	0,632	11	0,0781
0,24	2,24	0,61	0,952	0,98	0,627	12	0,0721
0,25	2,15	0,62	0,938	0,99	0,621	13	0,0656
0,26	2,07	0,63	0,925	1,00	0,6157	14	0,0613
0,27	2,00	0,64	0,912	1,1	0,5666	15	0,0573
0,28	1,94	0,65	0,899	1,2	0,5254	20	0,0442
0,29	1,88	0,66	0,887	1,3	0,4902	30	0,0303
0,30	1,82	0,67	0,876	1,4	0,4598	40	0,0231
0,31	1,76	0,68	0,864	1,5	0,4332	50	0,0187
0,32	1,71	0,69	0,853	1,6	0,4098	60	0,0157
0,33	1,66	0,70	0,842	1,7	0,3889	70	0,0136
0,34	1,62	0,71	0,832	1,8	0,3702	80	0,0119
0,35	1,57	0,72	0,822	1,9	0,3534	90	0,0106
0,36	1,53	0,73	0,812	2,0	0,3381	100	0,0096

7.3. При $x<0{,}25$ значение a^* для x, не содержащихся в табл. 6, вычисляют по асимптотической формуле

$$a^*=\frac{1+\sqrt{1+\frac{4}{3}x}}{4x}. \qquad (43)$$

При $x<0{,}07$ допускается использовать формулу

$$a^*=\frac{1}{2x}+\frac{1}{6}. \qquad (44)$$

7.4. Точечную оценку b^* параметра масштаба b вычисляют по формуле

$$b^*=\frac{\bar{x}}{a^*}, \qquad (45)$$

где $\bar{x}$ определяют в соответствии с п. 5.2, а a^* определяют в соответствии с п. 7.1.

7.5. Для определения доверительных границ параметров a и b вычисляют оценки $\sigma^*(a^*)$ и $\sigma^*(b^*)$ средних квадратических отклонений оценок a^* и b^* параметров a и b, определенных по пп. 7.1 и 7.4 соответственно. Способ вычисления $\sigma^*(a^*)$ и $\sigma^*(b^*)$ при $0{,}20\leqslant a^*\leqslant 5{,}0$ описан в п. 7.6, при $a^*<0{,}20$ — в п. 7.7, при $a^*>5{,}0$ — в п. 7.8.

7.6. При $0{,}20\leqslant a^*\leqslant 5{,}0$ величины $\sigma^*(a^*)$ и $\sigma^*(b^*)$ вычисляют по формулам

$$\sigma^*(a^*)=\sqrt{\frac{a^*}{n[a^*I(a^*)-1]}}, \qquad (46)$$

$$\sigma^*(b^*)=b^*\sqrt{\frac{I(a^*)}{n[a^*I(a^*)-1]}}. \qquad (47)$$

Значения $I(a^*)$ определяют по a^* с помощью табл. 5. Интерполяцию проводят в соответствии с п. 4.6.

7.7. При $a^*<0{,}20$ величины $\sigma^*(a^*)$ и $\sigma^*(b^*)$ вычисляют по формулам (46), (47), в которых $I(a^*)$ определяют по п. 4.7.

7.8. При $5{,}0<a^*\leqslant 20{,}0$ вычисляют $\sigma^*(a^*)$ и $\sigma^*(b^*)$ по формулам:

$$\sigma^*(a^*)=\sqrt{\frac{a^*(2a^*-1)}{n\left(1-\frac{a^*}{6(a^*-0{,}5)^2}\right)}}, \qquad (48)$$

$$\sigma^*(b^*)=b^*\sqrt{\frac{2-\frac{1}{6(a^*-0{,}5)^2}}{n\left(1-\frac{a^*}{6(a^*-0{,}5)^2}\right)}}. \qquad (49)$$

При $a^*>20{,}0$ вычисляют $\sigma^*(a^*)$ и $\sigma^*(b^*)$ по формулам:

$$a^*(a^*)=\sqrt{\frac{a^*(2a^*-1)}{n}}, \qquad (50)$$

$$\sigma^*(b^*)=b^*\sqrt{\frac{2}{n}}. \qquad (51)$$

7.9. Верхнюю доверительную границу $a_в$, соответствующую доверительной вероятности $1-\alpha$, вычисляют по формуле

$$a_в=a^*+u_\alpha\sigma^*(a^*), \qquad (52)$$

где a^* вычисляют в соответствии с п. 7.1, $\sigma^*(a^*)$ определяют по пп. 7.6—7.8 (в зависимости от величины a^*), квантиль стандартного нормального распределения u_α, соответствующая доверительной вероятности $1-\alpha$, приведена в табл. 3.

7.10. Нижнюю доверительную границу $a_н$, соответствующую доверительной вероятности $1-\alpha$, вычисляют по формуле

$$a_н=a^*-u_\alpha\sigma^*(a^*), \qquad (53)$$

где a^*, u_α, $\sigma^*(a^*)$ — те же, что и в п. 7.9.

Примечание. Если нижняя доверительная граница $a_н$, вычисленная по формуле (53), отрицательна, то полагают $a_н=0$.

7.11. Верхнюю доверительную границу $b_в$ параметра масштаба b, соответствующую доверительной вероятности $1-\alpha$, вычисляют по формуле

$$b_в=b^*+u_\alpha\sigma^*(b^*), \qquad (54)$$

где b^* вычисляют по п. 7.4, $\sigma^*(b^*)$ — по пп. 7.6—7.8 (в зависимости от a^*), квантиль u_α стандартного нормального распределения приведена в табл. 3.

7.12. Нижнюю доверительную границу $b_н$ параметра масштаба b, соответствующую доверительной вероятности $1-\alpha$, вычисляют по формуле

$$b_н=b^*-u_\alpha\sigma^*(b^*), \qquad (55)$$

где b^*, u_α, $\sigma^*(b^*)$ — те же, что и в п. 7.11.

Примечание. Если нижняя доверительная граница $b_н$, вычисленная по формуле (55), отрицательна, то полагают $b_н=0$.

7.13. Двусторонние доверительные границы определяют в соответствии с п. 2.9.

8. ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ ПРИ НЕИЗВЕСТНОМ ПАРАМЕТРЕ СДВИГА

8.1. Стандарт устанавливает правила определения точечных оценок и доверительных границ для следующих случаев:

оценивание трех неизвестных параметров (пп. 8.3—8.6);

оценивание параметров масштаба и сдвига при известном параметре формы (пп. 8.7—8.10);

оценивание параметров формы и сдвига при известном параметре масштаба (пп. 8.11—8.14);

оценивание параметра сдвига при известных параметрах формы и масштаба (пп. 8.15—8.18).

8.2. Для оценивания параметров применяют метод моментов и метод наилучших асимптотически нормальных оценок. Метод моментов является более простым и требует меньшего объема вычислений, чем метод наилучших асимптотически нормальных оценок. На основе оценок метода моментов вычисляют наилучшие асимптотически нормальные оценки и доверительные границы для параметров гамма-распределения. Метод наилучших асимптотически нормальных оценок при бóльшем объеме вычислений приводит к более точным оценкам, чем метод моментов. Указанные свойства оценок используют при выборе метода оценивания. При проведении расчетов с помощью вычислительной техники предпочтительным является метод наилучших асимптотически нормальных оценок как более точный и позволяющий определить доверительные границы.

8.3. При трех неизвестных параметрах a, b, c оценки метода моментов вычисляют по формулам:

$$\hat{a}=4\frac{s^6}{m_3^2}, \qquad (56)$$

$$\hat{b}=\frac{1}{2}\frac{m_3}{s^2}, \qquad (57)$$

$$\hat{c}=\bar{x}-\hat{a}\hat{b}, \qquad (58)$$

где среднее арифметическое наблюдений $\bar{x}$ и выборочную дисперсию s^2 определяют по п. 5.2, выборочный третий центральный момент m_3 вычисляют по формуле

$$m_3=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^3. \qquad (59)$$

Примечание. Если оценка параметра сдвига $\hat{c}$, вычисленная по формуле (58), больше минимального из наблюдений x_{min}, то полагают $\hat{c}=x_{min}$. Если отрицателен третий центральный момент m_3, вычисленный по формуле (53), то неверно, что наблюдения имеют гамма-распределение.

8.4. Если $\hat{a}>2,5$, то целесообразно определить наилучшие асимптотические нормальные оценки в соответствии с пп. 8.4.1—8.4.7.

8.4.1. По результатам наблюдений $x_1, x_2, ..., x_n$ и оценкам метода моментов $\hat{b}$, $\hat{c}$ (п. 8.3) вычисляют величины

$$d_1=\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i-\hat{c})\right)-\ln\hat{b}, \qquad (60)$$

$$d_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i-\hat{c}}. \qquad (61)$$

8.4.2. По оценкам метода моментов $\hat{a}$, $\hat{b}$, определенным по п. 8.3, и величинам d_1, d_2, определенным по п. 8.4.1, вычисляют

$$k_1=-\Psi(\hat{a})+d_1, \qquad (62)$$

$$k_2=1-(\hat{a}-1)\hat{b}d_2, \qquad (63)$$

где $\Psi(\hat{a})$ определяют по п. 8.4.7.

8.4.3. По оценке метода моментов $\hat{a}$ (п. 8.3) вычисляют

$$A(\hat{a})=\frac{1}{2I(\hat{a})-\dfrac{2\hat{a}-3}{(\hat{a}-1)^2}}, \qquad (64)$$

$$B(\hat{a})=A(\hat{a})(\hat{a}I(\hat{a})-1), \qquad (65)$$

в соответствии с пп. 8.4.3.1; 8.4.3.2.

8.4.3.1. При $\hat{a}\leqslant 5{,}0$ вычисляют $I(\hat{a})$ по п. 4.6, затем вычисляют $A(\hat{a})$ и $B(\hat{a})$ по формулам (64), (65).

8.4.3.2. При $\hat{a}>5{,}0$ вычисляют $A(\hat{a})$ и $B(\hat{a})$ по формулам:

$$A(\hat{a})=\frac{3(2\hat{a}-1)^3(\hat{a}-1)^2}{3(2\hat{a}-1)^2-4(\hat{a}-1)^2}, \qquad (66)$$

$$B(\hat{a})=\frac{(\hat{a}-1)^2[3(2\hat{a}-1)^2-2\hat{a}]}{3(2\hat{a}-1)^2-4(\hat{a}-1)^2}. \qquad (67)$$

Примечание. Формулы (66), (67) соответствуют подстановке в формулы (64), (65) значения $I(\hat{a})$, вычисленного по формуле (24) (с заменой α на $\hat{a}$). Формулу (25) для определения значения $A(\hat{a})$ применять запрещается, поскольку она дает относительную погрешность 33 % (при больших $\hat{a}$).

8.4.4. По оценкам метода моментов $\hat{a}$, $\hat{b}$ (п. 8.3) и величинам $A(\hat{a})$, $B(\hat{a})$ (п. 8.4.3) вычисляют величины

$$g_{11}=g_{11}(\hat{a})=2A(\hat{a}), \tag{68}$$

$$g_{12}=g_{21}(\hat{a})=-\frac{A(\hat{a})(\hat{a}-2)}{\hat{a}-1}, \tag{69}$$

$$g_{21}=g_{21}(\hat{a},\hat{b})=-\frac{\hat{b}A(\hat{a})}{\hat{a}-1}, \tag{70}$$

$$g_{22}=g_{22}(\hat{a},\ \hat{b})=\frac{\hat{b}}{2}\left(\frac{A(\hat{a})}{(\hat{a}-1)^2}-1\right)(\hat{a}-2), \tag{71}$$

$$g_{31}=g_{31}(\hat{a},\ \hat{b})=\hat{b}\,g_{12}(\hat{a}), \tag{72}$$

$$g_{32}=g_{32}(\hat{a},\ \hat{b})=\hat{b}(\hat{a}-2)\,B(\hat{a}). \tag{73}$$

8.4.5. По величинам k_1, k_2 (п. 8.4.2) и g_{11}, g_{12}, g_{21}, g_{22}, g_{31}, g_{32} (п. 8.4.4) вычисляют поправки к оценкам метода моментов по формулам:

$$\Delta a=g_{11}k_1+g_{12}k_2, \tag{74}$$

$$\Delta b=g_{21}k_1+g_{22}k_2, \tag{75}$$

$$\Delta c=g_{31}k_1+g_{32}k_2. \tag{76}$$

8.4.6. Вычисляют наилучшие асимптотически нормальные оценки a^*, b^*, c^* по формулам:

$$a^*=\hat{a}+\Delta a, \tag{77}$$

$$b^*=\hat{b}+\Delta b, \tag{78}$$

$$c^*=\hat{c}+\Delta c, \tag{79}$$

где оценки метода моментов $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$ определяют по п. 8.3, а поправки Δa, Δb, Δc к ним — по п. 8.4.5.

Примечание. Если хотя бы одна из оценок a^*, b^*, вычисленных по формулам (77), (78), оказывается отрицательной или равной 0, то в качестве оценок параметров a, b, c следует использовать оценки метода моментов. Если оценка параметра сдвига c^*, вычисленная по формуле (79), больше минимального из наблюдений $x_{\min}$, то полагают $c^*=x_{\min}$ (доверительные границы для параметра c в этом случае не вычисляют).

8.4.7. При $\hat{a} \leqslant 8{,}0$ значение $\Psi(\hat{a})$ определяют с помощью табл. 7. Если значение $\hat{a}$ попадает между двумя значениями a в табл. 7, то применяют линейную интерполяцию (в соответствии с разд. 9).

Таблица 7

a	$\Psi(a)$	a	$\Psi(a)$	a	$\Psi(a)$	a	$\Psi(a)$
1,00	−0,5772	1,41	−0,0502	1,81	0,2923	4,1	1,2841
1,01	−0,5610	1,42	−0,0411	1,82	0,2996	4,2	1,3114
1,02	−0,5448	1,43	−0,0311	1,83	0,3069	4,3	1,3373
1,03	−0,5290	1,44	−0,0211	1,84	0,3141	4,4	1,3637
1,04	−0,5133	1,45	−0,0113	1,85	0,3212	4,5	1,3889
1,05	−0,4979	1,46	−0,0016	1,86	0,3283	4,6	1,4133
1,06	−0,4826	1,47	+0,0080	1,87	0,3353	4,7	1,4373
1,07	−0,4677	1,48	+0,0176	1,88	0,3423	4,8	1,4608
1,08	−0,4528	1,49	+0,0271	1,89	0,3493	4,9	1,4837
1,09	−0,4383	1,50	+0,0365	1,90	0,3562	5,0	1,5061
1,10	−0,4238	1,51	+0,0458	1,91	0,3631	5,1	1,5280
1,11	−0,4096	1,52	+0,0550	1,92	0,3699	5,2	1,5495
1,12	−0,3955	1,53	+0,0641	1,93	0,3766	5,3	1,5699
1,13	−0,3817	1,54	+0,0732	1,94	0,3833	5,4	1,5910
1,14	−0,3679	1,55	+0,0822	1,95	0,3900	5,5	1,6111
1,15	−0,3544	1,56	+0,0911	1,96	0,3967	5,6	1,6307
1,16	−0,3410	1,57	+0,0999	1,97	0,4033	5,7	1,6501
1,17	−0,3278	1,58	+0,1087	1,98	0,4098	5,8	1,6692
1,18	−0,3147	1,59	+0,1174	1,99	0,4163	5,9	1,6878
1,19	−0,3018	1,60	+0,1260	2,00	0,4228	6,0	1,7061
1,20	−0,2890	1,61	+0,1346	2,1	0,4853	6,1	1,7241
1,21	−0,2765	1,62	+0,1431	2,2	0,5443	6,2	1,7418
1,22	−0,2640	1,63	+0,1515	2,3	0,6000	6,3	1,7586
1,23	−0,2517	1,64	+0,1598	2,4	0,6529	6,4	1,7762
1,24	−0,2395	1,65	+0,1681	2,5	0,7032	6,5	1,7929
1,25	−0,2275	1,66	+0,1763	2,6	0,7510	6,6	1,8093
1,26	−0,2155	1,67	+0,1845	2,7	0,7967	6,7	1,8255
1,27	−0,2038	1,68	+0,1926	2,8	0,8406	6,8	1,8416
1,28	−0,1921	1,69	+0,2006	2,9	0,8825	6,9	1,8573
1,29	−0,1806	1,70	+0,2085	3,0	0,9228	7,0	1,8728
1,30	−0,1692	1,71	+0,2164	3,1	0,9615	7,1	1,8880
1,31	−0,1579	1,72	+0,2243	3,2	0,9989	7,2	1,9031
1,32	−0,1467	1,73	+0,2321	3,3	1,0348	7,3	1,9173
1,33	−0,1357	1,74	+0,2398	3,4	1,0696	7,4	1,9325
1,34	−0,1248	1,75	+0,2475	3,5	1,1032	7,5	1,9467
1,35	−0,1140	1,76	+0,2551	3,6	1,1356	7,6	1,9608
1,36	−0,1032	1,77	+0,2626	3,7	1,1671	7,7	1,9748
1,37	−0,0926	1,78	+0,2701	3,8	1,1977	7,8	1,9887
1,38	−0,0821	1,79	+0,2776	3,9	1,2273	7,9	2,0022
1,39	−0,0703	1,80	+0,2850	4,0	1,2561	8,0	2,0156
1,40	−0,0614						

При $\hat{a} > 8{,}0$ значение $\Psi(\hat{a})$ вычисляют по формуле

$$\Psi(\hat{a})=\ln(\hat{a}-0{,}5). \qquad (80)$$

Примечание. Для повышения точности расчета определение значения $\Psi(\hat{a})$ целесообразно сводить к определению значения $\Psi(a')$ при некотором $1 \leqslant a' \leqslant 2$ путем многократного применения формулы

$$\Psi(a+1)=\Psi(a)+\frac{1}{a}. \qquad (81)$$

8.5. При $a^*\geqslant 2{,}5$ целесообразно найти оценки дисперсий a^*, b^*, c^*. Оценки дисперсий наилучших асимптотически нормальных оценок a^*, b^*, c^*, определенных по п. 8.4, вычисляют по формулам:

$$(\sigma^*(a^*))^2=\frac{2A(a^*)}{n}, \qquad (82)$$

$$(\sigma^*(b^*))^2=\frac{(b^*)^2}{2n}\left(1+\frac{A(a^*)}{(a^*-1)^2}\right), \qquad (83)$$

$$(\sigma^*(c^*))^2=\frac{(b^*)^2}{n}(a^*-2)B(a^*), \qquad (84)$$

где $A(a^*)$ и $B(a^*)$ определяют по п. 8.4.3 (с заменой $\hat{a}$ на a^*).

8.6. Нижние доверительные границы $a_н$, $b_н$, $c_н$ для параметров a, b, c соответственно вычисляют по формулам:

$$\begin{aligned} a_н&=a^*-u_\alpha\sigma^*(a^*),\\ b_н&=b^*-u_\alpha\sigma^*(b^*),\\ c_н&=c^*-u_\alpha\sigma^*(c^*), \end{aligned} \qquad (85)$$

где a^*, b^*, c^* — наилучшие асимптотически нормальные оценки параметров a, b, c, определенные по п. 8.4, $\sigma^*(a^*)$, $\sigma^*(b^*)$, $\sigma^*(c^*)$ — оценки их средних квадратических отклонений, вычисленные по п. 8.5, u_α — квантиль стандартного нормального распределения, соответствующая рассматриваемой доверительной вероятности $1-\alpha$ (см. табл. 3).

Верхние доверительные границы $a_в$, $b_в$, $c_в$ для параметров a, b, c соответственно вычисляют по формулам:

$$\begin{aligned} a_в&=a^*+u_\alpha\sigma^*(a^*),\\ b_в&=b^*+u_\alpha\sigma^*(b^*),\\ c_в&=c^*+u_\alpha\sigma^*(c^*), \end{aligned} \qquad (86)$$

где a^*, b^*, c^*, $\sigma^*(a^*)$, $\sigma^*(b^*)$, $\sigma^*(c^*)$, u_α — те же, что для нижних доверительных границ.

Двусторонние доверительные границы определяют в соответствии с п. 2.9.

Примечание. Если нижняя доверительная граница $a_н$ параметра формы a (или нижняя доверительная граница $b_н$ параметра формы b), определенные по формулам (85), отрицательны, то полагают $a_н=0$ (соответственно $b_н=0$). Если верхняя доверительная граница $c_н$ параметра сдвига c, определенная по формуле (86), больше минимального из наблюдений $x_{\min}$, то полагают $c_в=x_{\min}$.

8.7. Если параметр формы a известен, оценки метода моментов вычисляют по формулам:

$$\hat{b}=\frac{s}{\sqrt{a}}, \qquad (87)$$

$$\hat{c}=\bar{x}-s\sqrt{a}, \qquad (88)$$

где среднее арифметическое наблюдений $\bar{x}$ и выборочное среднее квадратическое отклонение s определяют по п. 5.2.

Примечание. Если оценка параметра сдвига $\hat{c}$, вычисленная по формуле (88), больше минимального из наблюдений $x_{\min}$, то полагают $\hat{c}=x_{\min}$.

8.8. Если параметр формы $a>2{,}0$, то целесообразно определить наилучшие асимптотически нормальные оценки параметров масштаба и сдвига в соответствии с пп. 8.8.1—8.8.5.

8.8.1. Вычисляют величину d_2 по п. 8.4.1, где оценку метода моментов $\hat{c}$ определяют по п. 8.7.

8.8.2. Вычисляют величину

$$k=1-(a-1)\hat{b}d_2, \qquad (89)$$

где $\hat{b}$ определяют по п. 8.7; d_2 — по п. 8.8.1.

8.8.3. Вычисляют величины

$$g_1=-\frac{(a-2)\hat{b}}{2}, \qquad (90)$$

$$g_2=-g_1 a, \qquad (91)$$

где $\hat{b}$ определяют по п. 8.7.

8.8.4. Вычисляют поправки к оценкам метода моментов по формулам:

$$\Delta b=g_1 k, \qquad (92)$$

$$\Delta c=g_2 k, \qquad (93)$$

где g_1 и g_2 определяют по п. 8.8.3, а k — по п. 8.8.2.

8.8.5. Вычисляют наилучшие асимптотически нормальные оценки b^*, c^* по формулам:

$$b^*=\hat{b}+\Delta b, \qquad (94)$$

$$c^*=\hat{c}+\Delta c, \qquad (95)$$

где оценки метода моментов $\hat{b}$, $\hat{c}$ определяют по п 8.7, а поправки Δb, Δc к ним — по п. 8.8.4.

Примечание. Если оценка параметра масштаба b^*, вычисленная по формуле (94), отрицательна или равна 0, то в качестве оценок параметров b, c следует использовать оценки метода моментов. Если оценка параметра сдвига c^*, вычисленная по формуле (95), больше минимального из наблюдений $x_{\min}$, то полагают $c^*=x_{\min}$ (доверительные границы для параметра c в этом случае не вычисляют).

8.9. Оценки дисперсий наилучших асимптотически нормальных оценок b^*, c^*, определенных по п. 8.8, вычисляют по формулам:

$$(\sigma^*(b^*))^2=\frac{(b^*)^2}{2n}, \tag{96}$$

$$(\sigma^*(c^*))^2=\frac{a(a-2)(b^*)^2}{2n}. \tag{97}$$

8.10. Доверительные границы для параметров b, c вычисляют по п. 8.6, где оценки параметров b^* и c^* определяют по п. 8.8, а оценки их средних квадратических отклонений $\sigma^*(b^*)$ и $\sigma^*(c^*)$ — по п. 8.9.

8.11. Если параметр масштаба b известен, оценки метода моментов вычисляют по формулам:

$$\hat{a}=\frac{s^2}{b^2}, \tag{98}$$

$$\hat{c}=\bar{x}-\frac{s^2}{b}, \tag{99}$$

где среднее арифметическое наблюдений $\bar{x}$ и выборочную дисперсию s^2 определяют по п. 5.2.

Примечание. Если оценка параметра сдвига $\hat{c}$, вычисленная по формуле (99), больше минимального из наблюдений $x_{\min}$, то полагают $\hat{c}=x_{\min}$.

8.12. Если оценка параметра формы $\hat{a}>2{,}5$, то целесообразно определить наилучшие асимптотически нормальные оценки параметров формы и сдвига в соответствии с пп. 8.12.1—8.12.5.

8.12.1. Вычисляют величины d_1 по формуле

$$d_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i-\hat{c})-\ln b, \tag{100}$$

и d_2 — по п. 8.4.1, где оценку $\hat{c}$ параметра сдвига c определяют по п. 8.11.

8.12.2. Вычисляют величины k_1 по п. 8.4.2 и k_2 по формуле

$$k_2=1-(\hat{a}-1)bd_2, \tag{101}$$

где оценку метода моментов $\hat{a}$ определяют по п. 8.11, а величины d_1, d_2 — по п. 8.12.1.

8.12.3. Вычисляют величины:

$$g'_{11}=\left(I(\hat{a})-\frac{\hat{a}-2}{(\hat{a}-1)^2}\right)^{-1}, \tag{102}$$

$$g'_{12}=-g'_{11}\frac{\hat{a}-2}{\hat{a}-1}, \tag{103}$$

$$g'_{21}=bg'_{12}, \tag{104}$$

$$g'_{22}=b(\hat{a}-2)I(\hat{a})\,g'_{11}, \tag{105}$$

где $\hat{a}$ определяют по п. 8.11, I $(\hat{a})$ вычисляют по п. 4.6 и п. 4.8.

8.12.4. По величинам k_1, k_2 (п. 8.12.2) и g'_{11}, g'_{12}, g'_{21}, g'_{22} (п. 8.12.3) вычисляют поправки к оценкам метода моментов по формулам:

$$\Delta a=g'_{11}k_1+g'_{12}k_2, \tag{106}$$

$$\Delta c=g'_{21}k_1+g'_{22}k_2. \tag{107}$$

8.12.5. Вычисляют наилучшие асимптотически нормальные оценки a^*, c^* по формулам:

$$a^*=\hat{a}+\Delta a, \tag{108}$$

$$c^*=\hat{c}+\Delta c, \tag{109}$$

где оценки метода моментов $\hat{a}$, $\hat{c}$ определяют по п. 8.11, а поправки Δa, Δc к ним — по п. 8.12.4.

Примечание. Если оценка параметра формы a^*, вычисленная по формуле (108), отрицательна или равна 0, то в качестве оценок параметров a, c используют оценки метода моментов. Если оценка параметра сдвига c^*, вычисленная по формуле (109), больше минимального из наблюдений $x_{\min}$, то полагают $c^*=x_{\min}$ (доверительные границы для параметра c в этом случае не вычисляют).

8.13. При $a^*\geqslant 2{,}5$ целесообразно найти оценки дисперсий a^*, c^*. Оценки дисперсий наилучших асимптотически нормальных оценок a^*, c^*, определенных по п. 8.12, вычисляют по формулам:

$$(\sigma^*(a^*))^2=\frac{1}{n}\left(I(a^*)-\frac{a^*-2}{(a^*-1)^2}\right)^{-1}, \tag{110}$$

$$(\sigma^*(c^*))^2=b^2(a^*-2)\,I(a^*)(\sigma^*(a^*))^2, \tag{111}$$

где I (a^*) определяют по пп. 4.6 и 4.8.

8.14. Доверительные границы для параметров a, c вычисляют по п. 8.6, где оценки параметров a^* и c^* определяют по п. 8.12, а оценки их средних квадратических отклонений $\sigma^*(a^*)$ и $\sigma^*(c^*)$ — по п. 8.13.

8.15. Если известны значения параметров формы a и масштаба b, то оценку метода моментов параметра сдвига c вычисляют по формуле

$$\hat{c} = \bar{x} - ab, \tag{112}$$

где среднее арифметическое наблюдений $\bar{x}$ определяют по п. 5.2.

Примечание. Если оценка параметра сдвига $\hat{c}$, вычисленная по формуле (112), больше минимального из наблюдений $x_{\min}$, то полагают $\hat{c}=x_{\min}$ (доверительные границы для c по п. 8.16 в этом случае не вычисляют).

8.16. Доверительные границы, соответствующие оценке $\hat{c}$ метода моментов, определяют по пп. 8.16.1—8.16.3.

8.16.1. Нижнюю доверительную границу $c_н$, соответствующую доверительной вероятности $1-\alpha$, вычисляют по формуле

$$c_н = \bar{x} - \frac{ab}{r_1(\alpha, na)}, \tag{113}$$

где $r_1(\alpha, na)$ определяют по разд. 3.

8.16.2. Верхнюю доверительную границу $c_в$, соответствующую доверительной вероятности $1-\alpha$, вычисляют по формуле

$$c_в = \bar{x} - \frac{ab}{r_2(\alpha, na)}, \tag{114}$$

где $r_2(\alpha, na)$ определяют по разд. 3.

8.16.3. Двусторонние доверительные границы определяют в соответствии с п. 2.9.

8.17. Если параметр формы $a>2,0$, то целесообразно определить наилучшую асимптотически нормальную оценку параметра сдвига в соответствии с пп. 8.17.1—8.17.3.

8.17.1. Вычисляют величину d_2 по п. 8.4.1, где оценку метода моментов $\hat{c}$ определяют по п. 8.15.

8.17.2. Вычисляют поправку к оценке метода моментов по формуле

$$\Delta c = b(a-2)(1-(a-1)bd_2), \tag{115}$$

где d_2 определяют по п. 8.17.1.

8.17.3. Вычисляют наилучшую асимптотически нормальную оценку по формуле

$$c^* = \hat{c} + \Delta c, \tag{116}$$

где оценку метода моментов $\hat{c}$ определяют по п. 8.15, а поправку Δc к ней — по п. 8.17.2.

Примечание. Если оценка параметра сдвига c^*, вычисленная по формуле (116), больше минимального из наблюдений $x_{\min}$, то полагают $c^* = x_{\min}$ (доверительные границы для параметра c в этом случае не вычисляют).

8.18. Доверительные границы для параметра c вычисляют по п. 8.6, где оценку параметра сдвига c^* определяют по п. 8.17, а ее среднее квадратическое отклонение σ^* (c^*) — по формуле

$$\sigma^*(c^*)=b\sqrt{\frac{a-2}{n}}\,. \tag{117}$$

9. ПРАВИЛА ИНТЕРПОЛЯЦИИ

9.1. В разд. 3, 4, 7, 8 предусмотрено использование значений функций r_1, r_2, G, I, H, Ψ, которые частично заданы таблично (табл. 1, 2, 4, 5, 6, 7). Значения этих функций для аргументов, лежащих между аргументами, приведенными в соответствующих таблицах, определяют по правилам интерполяции.

Допустим, что f — одна из указанных функций, и необходимо определить значение функции $y=f\,(x)$ для аргумента x, не содержащегося среди аргументов таблицы значений функции f. Рассмотрим x_1 и x_2 — два соседних значения аргумента в таблице значений функции f такие, что $x_1<x<x_2$. Пусть $y_1=f\,(x_1)$ и $y_2=f\,(x_2)$ — значения функции, соответствующие рассматриваемым значениям аргумента. В настоящем стандарте под интерполяцией понимают приближенное определение величины $y=f\,(x)$ по величинам x, x_1, x_2, y_1, y_2.

9.2. В пп. 3.4, 4.2 (при $x\geqslant-0{,}5$), 8.4 используют линейную интерполяцию (п. 9.3), в пп. 4.2 (при $x<-0{,}5$), 4.6, 7.2 — дробно-линейную (п. 9.4).

9.3. При использовании линейной интерполяции предполагают, что на отрезке $[x_1,\ x_2]$ функцию $y=f\,(x)$ можно достаточно точно приблизить линейной функцией, и приближенное значение y вычисляют по формуле

$$y=\frac{y_1\,(x_2-x)+y_2\,(x-x_1)}{x_2-x_1}\,. \tag{118}$$

9.4. При использовании дробно-линейной интерполяции предполагают, что на отрезке $[x_1,\ x_2]$ функцию $z=\frac{1}{f(x)}$ можно достаточно точно приблизить линейной функцией, т. е. функцию $y=f\,(x)$ можно достаточно точно приблизить функцией $\frac{1}{a+bx}$, где a и

b — некоторые числа. При этом методе интерполяции приближенное значение y вычисляют по формуле

$$y=\frac{y_1y_2(x_2-x_1)}{y_1(x-x_1)+y_2(x_2-x)}. \qquad (119)$$

9.5. При вычислениях по формулам (118), (119) произведения $y_1(x_2-x)$, $y_2(x-x_1)$, $y_1(x-x_1)$, $y_2(x_2-x)$, $y_1y_2(x_2-x_1)$ следует находить с точностью до шестого десятичного знака. При этом значения y определяются с точностью до четвертого десятичного знака, т. е. с той же точностью, что и табличные значения y.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1
Справочное

ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ ПРАВИЛ СТАНДАРТА

Пример 1

Результаты испытаний 8 дизелей дали следующие значения наработки до отказа: $t_1=9456$ ч, $t_2=152$ ч, $t_3=1574$ ч, $t_4=5856$ ч, $t_5=1643$ ч, $t_6=13296$ ч, $t_7=6547$ ч, $t_8=309$ ч.

Учитывая, что t_1, t_2, ..., t_8 предполагаются независимыми, одинаково распределенными случайными величинами, имеющими экспоненциальное распределение, а сумма таких величин имеет гамма-распределение с параметром формы, равным числу указанных величин, и параметром сдвига $c=0$, определить доверительный интервал для параметра масштаба с доверительной вероятностью $1-\alpha=0{,}9$.

Решение

Расчет ведется в соответствии с правилами разд. 3 настоящего стандарта.

Имеется единственное наблюдение ($n=1$)

$$T=t_1+t_2+\ldots+t_8=38833.$$

Случайная величина T имеет гамма-распределение с параметрами сдвига $c=0$, формы $a=8$ и неизвестным параметром масштаба b. По п. 3.1 настоящего стандарта вычисляем оценку параметра масштаба

$$b^*=\frac{1}{a}T=4854.$$

Поскольку доверительная вероятность $1-\alpha=0{,}9$, то с учетом п. 2.9 необходимо найти коэффициенты r_1 (0,05; 8) и r_2 (0,05; 8). По табл. 1 и 2 определяем

$$r_1=0{,}61, \quad r_2=2{,}01.$$

По пп. 3.2, 3.3 получаем требуемый доверительный интервал с границами

$$b_н=2961, \quad b_в=9757.$$

Пример 2

Стойкость резцов принято оценивать наработкой (в часах) до предельного состояния в эксплуатации. Установлено, что этот показатель подчинен гамма-распределению с $c=0$. В табл. 1 приведены данные о наработке до предельного состояния 50 резцов одного наименования и исполнения. Требуется оценить неизвестные параметры формы и масштаба гамма-распределения (с доверительной вероятностью 0,98).

Решение

В соответствии с п. 5.2 рассчитываем среднее арифметическое наблюдений $\bar{x}=57{,}88$, выборочную дисперсию $s^2=663{,}00$ и оценку параметра формы, полученную методом моментов, $\hat{a}=5{,}05$. По п. 5.3 рассчитываем величину $A=16{,}96$.

Из вида данных, приведенных в табл. 1, ясно, что наблюдения заданы с абсолютной погрешностью $\Delta=0{,}5$. По п. 5.4 рассчитываем относительную погрешность $\delta=0{,}0086$ и по п. 5.3 величину $B=8{,}68$.

Поскольку $A>B$, то в соответствии с п. 5.3 для оценивания параметров необходимо применять метод моментов.

В соответствии с п. 6.2 оценкой параметра масштаба является

$$\hat{b}=11{,}46.$$

По п. 6.3

$$\hat{\sigma}(\hat{a})=1{,}105.$$

Поскольку $\alpha=0{,}02$, то по п. 2.9 в соответствии с табл. 3 настоящего стандарта находим $u_{\alpha/2}=2{,}326$.

Получаем верхнюю доверительную границу (п. 6.4)

$$a_{\text{в}}=\hat{a}+u_{\alpha/2}\hat{\sigma}(\hat{a})=5{,}05+2{,}326\cdot 1{,}105=7{,}62,$$

Получаем нижнюю доверительную границу (п. 6.5)

$$a_{\text{н}}=2{,}48.$$

Рассчитываем среднее квадратическое отклонение для параметра масштаба (п. 6.6)

$$\hat{\sigma}(\hat{b})=2{,}61.$$

Находим верхнюю доверительную границу (п. 6.7)

$$b_{\text{в}}=17{,}54.$$

По п. 6.8 вычисляем нижнюю доверительную границу

$$b_{\text{н}}=5{,}38.$$

Пример 3

Принимая, что данные таблицы взяты из гамма-распределения с неизвестным параметром формы и параметром масштаба $b=10$, оценить этот неизвестный параметр (доверительная вероятность 0,98).

Наработка резцов до предельного состояния

Номер резца	Наработка до предельного состояния, ч	Номер резца	Наработка до предельного состояния, ч
1	9	26	56,5
2	17,5	27	57,5
3	21	28	58
4	26,5	29	59
5	27,5	30	59
6	31	31	60
7	32,5	32	61
8	34	33	61,5
9	36	34	62
10	36,5	35	63
11	39	36	64,5
12	40	37	65
13	41	38	67,5
14	42,5	39	68,5
15	43	40	70
16	45	41	72,5
17	46	42	77,5
18	47,5	43	81
19	48	44	82,5
20	50	45	90
21	51	46	96
22	53,5	47	101,5
23	55	48	117,5
24	56	49	127,5
25	56	50	130

Решение

В соответствии с п. 4.1 находим $x=1{,}64$. По табл. 4 настоящего стандарта $G\ (1{,}6)=5{,}4448$, $G\ (1{,}7)=5{,}9667$. В соответствии с п. 4.2 с помощью линейной интерполяции находим

$$a^*=G(1{,}64)=5{,}65.$$

Вычисляем $I\ (a^*)$ по п. 4.8:

$$I\ (5{,}65)=0{,}194.$$

Вычисляем величину (п. 4.5)

$$\sigma^*\ (a^*)=\frac{1}{\sqrt{50\cdot 0{,}194}}=0{,}32.$$

Поскольку необходимо найти доверительные границы с доверительной вероятностью $1-\alpha=0{,}98$, то в соответствии с пп. 4.11 и 2.9 находим $u_{\alpha/2}=u_{0{,}01}=$ $=2{,}326$ (табл. 3 настоящего стандарта).

Вычисляем верхнюю доверительную границу (п. 4.9)

$$a_в=5,65+2,326\cdot0,32=6,39.$$

Вычисляем нижнюю доверительную границу (п. 4.10)

$$a_н=5,65-2,326\cdot0,32=4,91.$$

Таким образом, в случае неизвестного значения b (пример 2) доверительный интервал для a есть

$$[2,48;\ 7,62],$$

а при известном b (пример 3)

$$[4,91;\ 6,39],$$

т. е. длина доверительного интервала сократилась в 3,45 раза.

Пример 4

Принимая, что данные табл. 1 взяты из гамма-распределения с неизвестными параметрами формы, масштаба и сдвига, оценить эти параметры (с доверительной вероятностью 0,90).

Решение

В соответствии с п. 5.2 рассчитываем среднее арифметическое наблюдений $\bar{x}=57,88$, выборочную дисперсию $s^2=663,00$. Выборочный третий центральный момент вычисляем по п. 8.3:

$$m_3=14927,91.$$

В соответствии с п. 8.3 вычисляем оценки параметров a, b, c методом моментов:

$$\hat{a}=5,23;$$

$$\hat{b}=11,26;$$

$$\hat{c}=-1,01.$$

Примечание. В табл. 1 приведены данные о наработке резцов до предельного состояния, поэтому наблюдения всегда неотрицательны и физический смысл могут иметь лишь неотрицательные значения параметра сдвига c. Следовательно, исходя из физических соображений, следует вместо $\hat{c}=-1,01$ положить $\hat{c}=0$. Однако из методических соображений целесообразно в настоящем приложении продемонстрировать применение правил настоящего стандарта, установленных для различных случаев оценивания параметров, на одном и том же материале табл. 1. Этот прием позволяет наглядно показать влияние наличия или отсутствия информации о значениях определенных параметров на длину доверительного интервала. В примере 4 и дальнейших считаем, что параметр c может принимать любые значения.

Поскольку $\hat{a}>2,5$, то целесообразно определить наилучшие асимптотически нормальные оценки.

По п. 8.4.1 находим величины

$$d_1=1,55420;$$

$$d_2=0,021322.$$

Чтобы вычислить величину k_1 (п. 8.4.2), необходимо определить Ψ (5,23). По табл. 7 настоящего стандарта $\Psi(5{,}2)=1{,}5495$, $\Psi(5{,}3)=1{,}5699$. В соответствии с п. 8.4.7 с помощью линейной интерполяции находим

$$\Psi(5{,}23)=1{,}55562.$$

Рассчитываем k_1, k_2 (п. 8.4.2):

$$k_1=-0{,}00142;$$

$$k_2=-0{,}01556.$$

Вычисляем A $(\hat{a})$, B $(\hat{a})$ (по п. 8.4.3.2, поскольку $\hat{a}>5{,}0$):

$$A(\widehat{a})=230{,}79;$$

$$B(\widehat{a})=23{,}446.$$

Для нахождения поправок к оценкам метода моментов вычисляем величины (п. 8.4.4)

$$g_{11}=461{,}58;\quad g_{22}=216{,}37;$$

$$g_{12}=-176{,}23;\quad g_{31}=-1984{,}35;$$

$$g_{21}=-614{,}35;\quad g_{32}=852{,}73.$$

Находим поправки Δa, Δb, Δc к оценкам метода моментов (п. 8.4.5):

$$\Delta a=2{,}09;$$

$$\Delta b=-2{,}49;$$

$$\Delta c=-10{,}45.$$

Вычисляем наилучшие асимптотически нормалньые оценки a^*, b^*, c^* (п. 8.4.6):

$$a^*=7{,}32;$$

$$b^*=8{,}77;$$

$$c^*=-11{,}46.$$

Поскольку $a^*\geqslant 2{,}5$, то целесообразно найти оценки дисперсий a^*, b^*, c^*. В соответствии с п. 8.5 вычисляем

$$A(a^*)=A(7{,}32)=763{,}312;$$

$$B(a^*)=B(7{,}32)=54{,}493.$$

Находим оценки дисперсий наилучших асимптотически нормальных оценок (п. 8.5)

$$(\sigma(a^*))^2=30{,}532;$$

$$(\sigma^*(b^*))^2=15{,}467;$$

$$(\sigma^*(c^*))^2=445{,}945.$$

Рассчитываем оценки средних квадратических отклонений

$$\sigma^*(a^*)=5,526;$$

$$\sigma^*(b^*)=3,933;$$

$$\sigma^*(c^*)=21,117.$$

Поскольку необходимо определить доверительные границы с доверительной вероятностью $1-\alpha=0,90$, то в соответствии с пп. 8.6 и 2.9 находим $u \quad =u_{0,05}=$ $=1,645$ (табл. 3 настоящего стандарта).

Вычисляем нижние доверительные границы (п. 8.6)

$$a_{н}=7,33-1,645\cdot 5,526=-1,77;$$

$$b_{н}=8,77-1,645\cdot 3,933=2,30;$$

$$c_{н}=-11,46-1,645\cdot 21,117=-46,20.$$

Поскольку нижняя доверительная граница $a_{н}$ параметра формы a, определенная по формуле (85) настоящего стандарта, отрицательна, то в соответствии с примечанием к п. 8.6 полагаем

$$a_{н}=0.$$

Вычисляем верхние доверительные границы (п. 8.6)

$$a_{в}=7,32+1,645\cdot 5,526=16,41;$$

$$b_{в}=8,77+1,645\cdot 3,933=15,24;$$

$$c_{в}=-11,46+1,645\cdot 21,117=23,28.$$

Поскольку верхняя доверительная граница $c_{в}$ параметра сдвига c, определенная по формуле (86) настоящего стандарта, больше минимального из наблюдений $x_{\min}=9,00$, то в соответствии с примечанием к п. 8.6 полагаем

$$c_{в}=9,00.$$

Пример 5

Принимая, что данные табл. 1 взяты из гамма-распределения с неизвестными параметрами масштаба и сдвига при известном параметре формы $a=5,23$, оценить неизвестные параметры (с доверительной вероятностью 0,90).

Решение

Рассчитываем $\bar{x}=57,88$; $s=25,75$. В соответствии с п. 8.7 вычисляем оценки параметров b, c методом моментов:

$$\hat{b}=11,26;$$

$$\hat{c}=-1,01.$$

Поскольку $a>2,0$, то целесообразно определить наилучшие асимптотически нормальные оценки.

По п. 8.4.1 находим величину

$$d_2=0,021322.$$

Рассчитываем k (п. 8.8.2):

$$k=-0,01556.$$

Вычисляем величины (п. 8.8.3)

$$g_1=-18,185;$$

$$g_2=95,107.$$

Находим поправки Δb, Δc к оценкам метода моментов (п. 8.8.4):

$$\Delta b=0,28;$$

$$\Delta c=-1,48;$$

Вычисляем наилучшие асимптотически нормальные оценки b^*, c^* (п. 8.8.5):

$$b^*=11,54;$$

$$c^*=-2,49.$$

Находим оценки дисперсий наилучших асимптотически нормальных оценок b^*, c^* (п. 8.9)

$$(\sigma^*(b^*))^2=1,3317,$$

$$(\sigma^*(c^*))^2=22,497.$$

Определяем оценки средних квадратических отклонений

$$\sigma^*(b^*)=1,15,$$

$$\sigma^*(c^*)=4,74.$$

Поскольку необходимо определить доверительные границы с доверительной вероятностью $1-\alpha=0,90$, то в соответствии с п. 2.9 находим $u_{\alpha/2}=u_{0,05}=1,645$ (табл. 3 настоящего стандарта).

Вычисляем верхние доверительные границы (пп. 8.6; 8.10)

$$b_в=11,54+1,645\cdot 1,15=13,43;$$

$$c_в=-2,49+1,645\cdot 4,74=5,30.$$

Вычисляем нижние доверительные границы (пп. 8.6; 8.10)

$$b_н=11,54-1,645\cdot 1,15=9,65;$$

$$c_н=-2,49-1,645\cdot 4,74=-10,28.$$

Пример 6

Принимая, что данные табл. 1 взяты из гамма-распределения с неизвестными параметрами формы и сдвига при известном параметре масштаба $b=11,26$, оценить неизвестные параметры (с доверительной вероятностью 0,90).

Решение

Рассчитываем $\bar{x}=57,88$; $s^2=663,00$. В соответствии с п. 8.11 вычисляем оценки параметров a, c методом моментов

$$\hat{a}=5,23;$$

$$\hat{c}=-1,01.$$

Поскольку $\hat{a}>2,5$, то целесообразно определить наилучшие асимптотически нормальные оценки параметров формы и сдвига.

По п. 8.12.1 находим величину $d_1=1,55420$, по п. 8.4.1 — величину $d_2=0,021322$.

Рассчитываем k_1 и k_2 (п. 8.12.2):

$$k_1=-0,00142;$$

$$k_2=-0,01556.$$

Вычисляем величины (п. 8.12.3)

$$g'_{11}=33,211;$$

$$g'_{12}=-25,360;$$

$$g'_{21}=-285,55;$$

$$g'_{22}=254,41.$$

Находим поправки к оценкам метода моментов

$$\Delta a=0,35;$$

$$\Delta b=-3,55.$$

Вычисляем наилучшие асимптотически нормальные оценки a^*, c^* (п. 8.12.5):

$$a^*=5,53;$$

$$c^*=-4,56.$$

Находим оценки дисперсий наилучших асимптотически нормальных оценок a^*, c^* (п. 8.13)

$$(\sigma^*(a^*))^2=0,78288;$$

$$(\sigma^*(c^*))^2=89,062.$$

Определяем оценок средних квадратических отклонений

$$\sigma^*(a^*)=0,885;$$

$$\sigma^*(c^*)=9,44.$$

Поскольку необходимо найти доверительные границы с доверительной вероятностью $1-\alpha=0,90$, то в соответствии с п. 2.9 находим $u_{\alpha/2}=u_{0,05}=1,645$ (табл. 3 настоящего стандарта).

Вычисляем нижние доверительные границы (пп. 8.6; 8.14)

$$a_н=5,58-1,645\cdot 0,885=4,12;$$

$$c_н=-4,56-1,645\cdot 9,44=-20,09.$$

Вычисляем верхние доверительные границы (п. 8.6; 8.14)

$$a_в=5,58+1,645\cdot 0,885=7,04;$$

$$c_в=-4,56+1,645\cdot 9,44=10,97.$$

Поскольку верхняя доверительная граница $c_в=10,97$ параметра сдвига c, определенная по формуле (86) настоящего стандарта, больше минимального из наблюдений $x_{min}=9,00$, то в соответствии с примечанием к п. 8.6 полагаем $c_в=9,00$.

Пример 7

Принимая, что данные табл. 1 взяты из гамма-распределения с неизвестным параметром сдвига c при известных значениях параметров формы $a=5{,}23$ и масштаба $b=11{,}26$, оценить параметр сдвига c (с доверительной вероятностью 0,90).

Решение

Рассчитываем $\bar{x}=57{,}88$. В соответствии с п. 8.15 вычисляем оценку параметра методом моментов

$$\hat{c}=-1{,}01.$$

Поскольку необходимо определить двусторонние доверительные границы с доверительной вероятностью $1-\alpha=0{,}90$, то в соответствии с п. 2.9 односторонние доверительные границы для c определяем по пп. 8.16.1 и 8.16.2 с доверительной вероятностью 0,95.

Поскольку $na=261{,}5$, то для расчета доверительных границ необходимо определить r_1 (0,05; 261,5) и r_2 (0,05; 261,5). В соответствии с разд. 3 вычисления проводим по п. 3.5 с $u_{0,05}=1{,}645$. По формуле (12) настоящего стандарта получаем

$$r_1(0{,}05;\ 261{,}5)=0{,}9064.$$

По формуле (13) настоящего стандарта получаем

$$r_2(0{,}05;\ 261{,}5)=1{,}1112.$$

По п. 8.16.1 находим

$$c_{\text{н}}=57{,}88-\frac{5{,}23\cdot 11{,}26}{0{,}9064}=-7{,}09.$$

По п. 8.16.2 находим

$$c_{\text{в}}=57{,}88-\frac{5{,}23\cdot 11{,}26}{1{,}1112}=4{,}88.$$

Поскольку параметр формы $a=5{,}23>2{,}00$, то целесообразно определить наилучшую асимптотически нормальную оценку параметра сдвига.

По пп. 8.17.1; 8.4.1 находим величину

$$d_2=0{,}021322.$$

Вычисляем поправку к оценке метода моментов (п. 8.17.2)

$$\Delta c=-0{,}57.$$

Вычисляем наилучшую асимптотически нормальную оценку

$$c^*=-1{,}58.$$

С помощью наилучшей асимптотически нормальной оценки c^* находим доверительные границы для параметра сдвига c. Вычисляем среднее квадратическое отклонение оценки c^* (п. 8.18):

$$\sigma^*(c^*)=2{,}862.$$

Поскольку необходимо определить доверительные границы с доверительной вероятностью $1-\alpha=0{,}90$, то в соответствии с п. 2.9 находим $u_{\alpha/2}=u_{0,05}=1645$ (табл. 3 настоящего стандарта).

Вычисляем доверительные границы для параметра сдвига (пп. 8.6; 8.18)

$$c_н=-1,58-1,645\cdot 2,862=-6,29;$$

$$c_в=-1,58+1,645\cdot 2,862=3,13.$$

Длина доверительного интервала, построенного на основе наилучшей асимптотически нормальной оценки (п. 8.18), меньше длины доверительного интервала, построенного на основе оценки метода моментов (п. 8.16), в 1,27 раза.

Примечание. Отличие от 0 параметра сдвига в каждом отдельном случае, особенно в задачах надежности [19], должно быть подтверждено экспериментально-статистическим путем по правилам разд. 8 настоящего стандарта: если доверительный интервал для параметра сдвига c содержит 0, то полагают $c=0$. В примерах 4—7 доверительные интервалы для c содержат 0, поэтому для данных табл. 1 целесообразно принять $c=0$ и оценивать параметры формы и масштаба соответствующим образом (см. примеры 2, 3).

ПРИЛОЖЕНИЕ 2
Справочное

СВОЙСТВА ГАММА-РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ОЦЕНКИ ЕГО ХАРАКТЕРИСТИК

1. Если случайная величина X имеет гамма-распределение с плотностью вероятности $f\ (x;\ a,\ b,\ c)$, то случайные величины

$$Y=X-c \text{ и } Z=\frac{X-c}{b}$$

также имеют гамма-распределение с плотностями вероятности $f(x;a,b,0)$ и $f(x;a,1,0)$ соответственно.

2. Стандартным гамма-распределением называется гамма-распределение с $b=1$ и $c=0$. Плотность стандартного гамма-распределения имеет вид

$$f(x;\ a)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(a)}\,x^{a-1}e^{-x}, & \text{если } x\geqslant 0;\\ 0, & \text{если } x<0.\end{cases} \qquad (1)$$

Если случайная величина X имеет гамма-распределение с плотностью $f\ (x;\ a,\ b,\ c)$, то случайная величина

$$Z=\frac{X-c}{b} \qquad (2)$$

имеет стандартное гамма-распределение.

3. Стандартное гамма-распределение при увеличении параметра формы сходится к нормальному распределению. Если Z—случайная величина, имеющая стан-

дартное гамма-распределение с параметром формы a, то для любого действительного числа x

$$\lim_{a\to\infty} P\left\{\frac{Z-a}{\sqrt{a}} \leqslant x\right\}=\Phi(x), \qquad (3)$$

где $P\{\cdot\}$ обозначает вероятность события, указанного в фигурных скобках, $\Phi(x)$ — функция стандартного нормального распределения с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1,

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy. \qquad (4)$$

Для случайной величины X, имеющей гамма-распределение с плотностью $f(x;\ a,\ b,\ c)$, по п. 2 справедливо аналогичное соотношение:

$$\lim_{a\to 0} P\left\{\frac{X-c-ab}{b\sqrt{a}} \leqslant x\right\}=\Phi(x) \qquad (5)$$

при всех x. т. е. гамма-распределение сходится к нормальному при стремлении к бесконечности параметра формы и постоянных значениях параметров масштаба и сдвига.

4. Если независимые случайные величины X_1 и X_2 имеют гамма-распределение с параметрами формы a_1 и a_2, совпадающими параметрами масштаба b и параметрами сдвига c_1 и c_2 соответственно, то их сумма X_1+X_2 также имеет гамма-распределение с параметром формы a_1+a_2, тем же параметром масштаба b и параметром сдвига c_1+c_2. Это свойство воспроизводимости вытекает из вида характеристической функции гамма-распределения (п. 1.3 настоящего стандарта).

Свойство воспроизводимости гамма-распределения может быть использовано при оценивании параметров, когда параметр сдвига неизвестен. Например, если $x_1, x_2, \dots x_{2k}$ — выборка объема $2k$ из гамма-распределения с параметрами формы $a=1{,}5$, масштаба b и сдвига c, то согласно разд. 8 настоящего стандарта можно вычислить лишь оценки метода моментов. Рассмотрим величины $y_1=x_1+x_2$; $y_2=x_3+x_4, \dots, y_k=x_{2k-1}+x_{2k}$. Согласно свойству воспроизводимости величины $y_1, y_2, \dots, y_k$ можно рассматривать как выборку объема k из гамма-распределения с параметрами формы $2a=3{,}0$, масштаба b и сдвига $2c$.

В соответствии с разд. 8 можно определить наилучшие асимптотически нормальные оценки параметров и доверительные границы для них.

5. Характеристики случайной величины, имеющей гамма-распределение, могут быть найдены путем замены в их выражениях через параметры гамма-распределения истинных значений параметров оценками этих параметров. Так, согласно п. 1.3 настоящего стандарта ($c=0$) математическое ожидание — ab, а дисперсия — ab^2. Следовательно, их оценками будут $a^*\ b^*$ и $a^*\ (b^*)^2$ или $\hat{a}\hat{b}$ и $\hat{a}\ (\hat{b})^2$, в зависимости от того, использовался ли метод максимального правдоподобия или метод моментов.

6. Вероятности попадания в область и, наоборот, процентные точки могут быть найдены с помощью таблиц хи-квадрат распределения [8, 15].

ПРИЛОЖЕНИЕ 3
Справочное

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ СТАНДАРТА

1. Область применения гамма-распределения

Гамма-распределение имеет широкие приложения в надежности и теории испытаний, в различных областях техники, метеорологии и т. д. [7, 13, 14]. В частности, гамма-распределению могут быть подчинены общий срок службы изделия, длина цепочки токопроводящих пылинок, время достижения изделием предельного состояния при коррозии [14], время наработки до k-го отказа [7] и т. д. Продолжительность жизни больных хроническими заболеваниями, время достижения определенного эффекта при лечении в ряде случаев имеют гамма-распределение. Это распределение наиболее адекватно для описания спроса в экономико-математических моделях управления запасами [17].

Применимость гамма-распределения в ряде прикладных задач может быть обоснована свойством воспроизводимости (п. 4 приложения 2). Так, сумма k экспоненциально распределенных случайных величин с одним и тем же параметром λ имеет гамма-распределение с параметром формы k, параметром масштаба $b=\frac{1}{\lambda}$ и параметром сдвига $c=0$. Поэтому гамма-распределение часто рассматривают в тех прикладных областях, в которых применяют экспоненциальное распределение.

2. Метод максимального правдоподобия при известном параметре сдвига

Точечные оценки параметров, полученные методом максимального правдоподобия, являются состоятельными и асимптотически эффективными [1]. Эти свойства они имеют при выполнении некоторых условий регулярности, которые справедливы для гамма-распределения во всех рассмотренных в настоящем стандарте случаях [2].

Логарифмическая функция правдоподобия для гамма-распределения с $c=0$ имеет вид

$$L=-n\ln\Gamma(a)+(a-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-an\ln b-\frac{1}{b}\sum_{i=1}^{n}x_i. \qquad (1)$$

При известном параметре масштаба b оценку максимального правдоподобия параметра формы a находят из уравнения

$$\frac{\partial L}{\partial a}=-n\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}+\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{x_i}{b}\right)=0. \qquad (2)$$

В этом уравнении участвует так называемая пси-функция (логарифмическая производная гамма-функции)

$$\Psi(a)=\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}. \qquad (3)$$

Решение уравнения (2) дано в п. 4.1 настоящего стандарта, в котором символом G обозначена функция, обратная пси-функции Ψ (a).

При известном параметре формы a оценку максимального правдоподобия параметра масштаба b находят из уравнения

$$\frac{\partial L}{\partial b} = -\frac{an}{b} + \frac{1}{b^2} \sum_{i=1}^{n} x_i = 0. \qquad (4)$$

Решение уравнения (4) приведено в п. 3.1 настоящего стандарта.

При неизвестных параметрах масштаба и формы оценки максимального правдоподобия находят из системы уравнений (2) и (4). Оценку параметра масштаба b выражают через наблюдения и оценку параметра формы a (п. 3.1 настоящего стандарта). Подставляя это выражение в (2), получают уравнение

$$\ln a - \Psi(a) = \ln\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \right) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln\ x_i. \qquad (5)$$

Решение уравнения (5) приведено в п. 7.1 настоящего стандарта, в котором через H обозначена функция, обратная функции

$$Q\,(a) = \ln a - \Psi(a).$$

Матрица, обратная к матрице рассеяния оценок максимального правдоподобия параметров формы a и масштаба b, имеет вид [2, с. 83, 98]:

$$E \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial L}{\partial a}\right)^2 & \frac{\partial L}{\partial a} \cdot \frac{\partial L}{\partial b} \\ \frac{\partial L}{\partial a} \cdot \frac{\partial L}{\partial b} & \left(\frac{\partial L}{\partial b}\right)^2 \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} \Psi'(a) & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{b} & \frac{a}{b^2} \end{pmatrix}. \qquad (6)$$

Обращая ее, находим дисперсии оценок максимального правдоподобия. Они зависят от истинных значений параметров. Заменяя истинные значения параметров на соответствующие оценки максимального правдоподобия, получаем оценки дисперсий. Они приведены в п. 7.6 настоящего стандарта, в котором применяется обозначение $I(a) = \Psi'\ (a)$. Для оценивания параметра формы при известном параметре масштаба аналогично формулируем п. 4.5 настоящего стандарта.

Определение доверительных границ с использованием метода максимального правдоподобия при неизвестном параметре формы и двух неизвестных параметрах основано на асимптотической нормальности оценок максимального правдоподобия [1, 2].

Определение доверительных границ для оценивания параметра масштаба при известном параметре формы основано на свойстве воспроизводимости гамма-распределения (п. 4 приложения 2).

Метод максимального правдоподобия дает асимптотически несмещенные оценки [1, 2, 3, 16], смещение оценок пренебрежимо мало по сравнению с их средними квадратическими отклонениями.

3. Метод моментов ($c=0$)

Согласно методу моментов в качестве оценок берут значения параметров, которым соответствуют математическое ожидание и дисперсия, равные выборочному среднему арифметическому и выборочной дисперсии соответственно. Используя п. 1.3 настоящего стандарта, получаем уравнения для определения оценок методом моментов ($c=0$):

$$\overline{x}=ab, \quad s^2=ab^2, \tag{7}$$

где $\overline{x}$ и s^2 находятся по п. 5.2 настоящего стандарта. Решение уравнений (7) приведено в пп. 5.2 и 6.2 настоящего стандарта.

Для определения доверительных границ в процессе подготовки настоящего стандарта проведено изучение асимптотического поведения точечных оценок параметров формы и масштаба, полученных методом моментов. Было доказано, что оценки метода моментов $\hat{a}$ и $\hat{b}$ (пп. 5.2 и 6.2 настоящего стандарта) асимптотически нормальны, асимптотическое смещение имеет порядок $\frac{1}{n}$, т. е. оно пренебрежимо мало по сравнению с асимптотическим среднеквадратическим отклонением, имеющим порядок $\frac{1}{\sqrt{n}}$ (где n — объем выборки), а асимптотические дисперсии имеют вид

$$D\left(\frac{(\overline{x})^2}{s^2}\right)\sim\frac{1}{n\sigma^4}\left\{\sigma^2(2EX)^2-\frac{4(EX)^3}{\sigma^2}E(X-EX)^3+\left(\frac{EX}{\sigma}\right)^4(E(X-EX)^4-\sigma^4)\right\}, \tag{8}$$

$$D\left(\frac{s^2}{\overline{x}}\right)\sim\frac{1}{n(EX)^2}\left\{E(X-EX)^4-\sigma^4-\frac{2\sigma^2}{EX}E(X-EX)^3+\frac{\sigma^6}{(EX)^2}\right\}, \tag{9}$$

где EX и σ^2 — математическое ожидание и дисперсия случайной величины X, одинаково распределенной с наблюдениями $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Моменты стандартного гамма-распределения (см. п. 2 приложения 2) имеют вид [3, с. 184—185]:

$$EX^m=\frac{\Gamma(a+m)}{\Gamma(a)}, \quad m=1, 2, \ldots, \tag{10}$$

где $\Gamma(a)$ — гамма-функция (п. 1.1 настоящего стандарта).

Из формул (8), (9), (10) следует, что

$$D(\hat{a})\sim\frac{2a(a+1)}{n}; \tag{11}$$

$$D(\hat{b})\sim\frac{b^2}{n}\left(2+\frac{3}{a}\right). \tag{12}$$

Определение доверительных границ при оценивании методом моментов основано на асимптотической нормальности оценок $\hat{a}$ и $\hat{b}$ с математическими ожиданиями a и b и дисперсиями, заданными формулами (11) и (12) соответственно (при этом в формулы для дисперсий вместо неизвестных истинных значений параметров подставлены их оценки методом моментов — см. пп. 6.3 и 6.6 настоящего стандарта).

Метод моментов дает асимптотически несмещенные оценки (смещение оценок пренебрежимо мало по сравнению с их средними квадратическими отклонениями).

4. Выбор метода оценивания параметров формы и масштаба при известном параметре сдвига

С точки зрения классической математической статистики [1, 2] оценки максимального правдоподобия параметров гамма-распределения предпочтительнее оценок метода моментов, поскольку асимптотическая дисперсия первых меньше асимптотической дисперсии вторых. (Не рассматриваем перспективный подход к статистике, основанный на понятии устойчивости [4, 5], в котором сравнение оценок по дисперсии не является основным критерием при выборе метода оценивания. Этот подход отличается от классического не только тем, что в нем рассматриваются неквадратичные функции риска, но и тем, что свойства оценок изучаются в более широком классе распределений, чем исходное параметрическое семейство).

Классическая теория математической статистики развита в предположении, что наблюдения известны абсолютно точно. Однако в реальных прикладных задачах наблюдаемые значения определяют лишь с конечной точностью, т. е. с ненулевыми абсолютными и относительными погрешностями. Статистики, рассчитываемые по наблюдениям, также определяют с конечной точностью. В частности, величину x в п. 7.1 настоящего стандарта находят с некоторой абсолютной погрешностью. Поскольку оценку максимального правдоподобия a^* определяют по формуле $a^*=H(x)$, а функция $H(x)$ при малых x вычисляется по формуле

$$H(x)=\frac{1}{2x}+\frac{1}{6} \qquad (13)$$

(п. 7.3 настоящего стандарта), то сравнительно малая погрешность в определении x приводит к большой погрешности при нахождении оценки максимального правдоподобия a^*. Этот эффект имеет место при малых x, что соответствует большим значениям параметра формы a.

Пусть величина x (п. 7.1 настоящего стандарта) определена с абсолютной погрешностью Δx. Можно показать, что

$$\Delta a^*\approx |H'(x)|\,\Delta x\approx\frac{1}{2x^2}\,\Delta x, \qquad (14)$$

где Δa^* — абсолютная погрешность определения оценки a^* параметра формы a. Выражая x через a^* с помощью п. 7.3 настоящего стандарта (формула (44)), получаем

$$\Delta a^*\approx 2(a^*)^2\Delta x. \qquad (15)$$

Формулы (14), (15) получены в предположении, что x мало. При $0<x\leqslant 0{,}15$, что соответствует $a^*\geqslant 3{,}49$, относительная погрешность (13) не превышает 9%, т. е. малым можно считать $x\leqslant 0{,}15$.

В соответствии с принципом уравнивания погрешностей в теории устойчивости [4] в качестве меры точности метода оценивания рассматриваем сумму абсолютной погрешности, связанной с конечной точностью вычислений, и среднего квадратического отклонения оценки, т. е. сумму вычислительной погрешности и среднего квадратического отклонения случайной погрешности.

Для оценки максимального правдоподобия a^* мерой точности является

$$\nu_1=\Delta a^*+\sigma^*(a^*), \qquad (16)$$

где среднее квадратическое отклонение σ^* (a^*) определяют по п. 7.5 настоящего стандарта. Для оценки метода моментов $\hat{a}$ параметра формы a мерой точности является

$$\nu_2=\Delta\hat{a}+\hat{\sigma}(\hat{a}), \tag{17}$$

где $\Delta\hat{a}$ — вычислительная погрешность метода моментов, среднее квадратическое отклонение $\hat{\sigma}$ $(\hat{a})$ — по п. 6.3 настоящего стандарта.

Если $\nu_1<\nu_2$, то оценка максимального правдоподобия предпочтительнее оценки метода моментов, если $\nu_1>\nu_2$, то оценка метода моментов предпочтительнее оценки максимального правдоподобия.

Пусть наблюдения определены с относительной погрешностью δ. Установленно, что

$$\Delta a^*\approx 4a^2\delta, \tag{18}$$

$$\Delta\hat{a}\approx 2a(1+3\sqrt{a})\,\delta. \tag{19}$$

С учетом формулы (11) и п. 7.8 настоящего стандарта заключаем, что зависимости ν_1 и ν_2 от параметра формы a, относительной погрешности δ и объема выборки n имеют вид

$$\nu_1(a,\delta,n)\approx 4a^2\delta+\sqrt{\frac{a(2a-1)}{n}}, \tag{20}$$

$$\nu_2(a,\ \delta,\ n)\approx 2a(1+3\sqrt{a})\ \delta+\sqrt{\frac{2a(a+1)}{n}}. \tag{21}$$

Поскольку истинное значение a неизвестно, для практического использования формул (20) и (21) надо заменить в них a на состоятельную оценку a, например, на оценку метода моментов $\hat{a}$. Тогда при

$$\nu_1(\hat{a},\delta,\ n)-\nu_2(\hat{a},\ \delta,\ n)\geqslant 0 \tag{22}$$

следует использовать оценки метода моментов, а при

$$\nu_1(\hat{a},\ \delta,\ n)-\nu_2(\hat{a},\ \delta,\ n)<0 \tag{23}$$

следует вычислять оценки максимального правдоподобия.

Заменяя ν_1 и ν_2 в (22) и (23) на их приближения по формулам (20), (21) и упрощая полученное выражение в предположении, что a достаточно велико ($a>3{,}50$), приходим к правилу п. 5.3 настоящего стандарта.

Если задана абсолютная погрешность Δ наблюдений, то вычисление относительной погрешности δ, используемой в (18), (19), проводят по п. 5.4 настоящего стандарта. Переход от Δ к δ обоснован в тех же предположениях, в которых справедливы формулы (18) и (19).

5. Оценивание в случае неизвестного параметра сдвига

Оценивание проводят в два этапа. Сначала находят оценки метода моментов. Затем на их основе вычисляют наилучшие асимптотически нормальные оценки. Последние имеют такие же асимптотические свойства, как и оценки максимального правдоподобия — они асимптотически эффективны, смещение пренебрежимо мало по сравнению со средним квадратическим отклонением. Поскольку предположения предельной теории выполнены лишь при параметре формы $a>2$, то наилучшие асимптотически нормальные оценки вычисляют лишь в случае, когда оценка метода моментов параметра формы $\hat{a}>2{,}5$ или когда $a>2{,}0$. Доверительные границы строят на основе наилучших асимптотически нормальных оценок и оценок их дисперсий (за исключением оценивания параметра сдвига при известных параметрах формы и масштаба, когда доверительные границы строят также и на основе оценки метода моментов).

Сформулируем теоретический результат, из которого вытекают правила разд. 8 настоящего стандарта.

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — выборка из распределения с плотностью $f(x, \Theta)$, зависящей от векторного параметра $\Theta=(\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_k)$.

Для гамма-распределения с тремя неизвестными параметрами $k=3$; $\Theta_1=a$; $\Theta_2=b$; $\Theta_3=c$; $\Theta=(a, b, c)$; плотность $f(x), \Theta)=f(x; a, b, c)$ приведена в п. 1.1 настоящего стандарта.

Рассмотрим логарифмическую функцию правдоподобия

$$L(\Theta)=\sum_{i=1}^{n} \ln f(x_i, \Theta). \tag{24}$$

Для гамма-распределения с тремя неизвестными параметрами

$$L(a, b, c)=-na \ln b - n\Gamma(a)+(a-1)\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i-c)-\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i-c}{b}. \tag{25}$$

Важную роль в предельной теории наилучших асимптотически нормальных оценок играет информационная матрица Фишера $F(\Theta)$ порядка $k\times k$ с элементами

$$F_{jm}(\Theta)=E\left(\frac{\partial L(\Theta)}{\partial\Theta_j}\cdot\frac{\partial L(\Theta)}{\partial\Theta_m}\right), j, m=1, \ldots, k. \tag{26}$$

Для гамма-распределения с тремя неизвестными параметрами

$$F(a, b, c)=\begin{Bmatrix} I(a) & \frac{1}{b} & \frac{1}{b(a-1)} \\ \frac{1}{b} & \frac{a}{b^2} & \frac{1}{b^2} \\ \frac{1}{b(a-1)} & \frac{1}{b^2} & \frac{1}{b^2(a-2)} \end{Bmatrix}, \tag{27}$$

где функция $I(a)$ определена в п. 2.

Наилучшие асимптотически нормальные оценки строятся на основе состоятельных оценок $\Theta_{(n)}$ параметра Θ, удовлетворяющих некоторым условиям [16]. Для гамма-распределения они строятся на основе оценок метода моментов, $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$ параметров a, b, c соответственно (п. 8.3 настоящего стандарта).

Рассмотрим k-мерный вектор-столбец $S(x, \Theta)$ с координатами

$$s_i=\frac{\partial}{\partial\Theta_i}\ln f(x, \Theta), \quad i=1, \ldots, k. \tag{28}$$

Для гамма-распределения с тремя неизвестными параметрами имеем:

$$s_1=\frac{\partial \ln f}{\partial a}=-\Psi(a)+\ln\left(\frac{x-c}{b}\right), \quad (29)$$

$$s_2=\frac{\partial \ln f}{\partial b}=-\frac{a}{b}+\frac{x-c}{b^2}, \quad (30)$$

$$s_3=-\frac{a-1}{x-c}+\frac{1}{b}. \quad (31)$$

Положим

$$t_n(\Theta)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} s(x_i,\Theta). \quad (32)$$

Наилучшие асимптотически нормальные оценки $\Theta'_{(n)}$ вычисляют по формуле

$$\Theta'_{(n)}=\Theta_{(n)}+(F(\Theta_{(n)}))^{-1}\, t_n(\Theta_{(n)}), \quad (33)$$

где $(F\ (\Theta_{(n)}))^{-1}$ — матрица, обратная к $F\ (\Theta_{(n)})$.

Наилучшие асимптотически нормальные оценки $\Theta'_{(n)}$, определенные по формуле (33), как и оценки максимального правдоподобия, асимптотически нормальны с математическим ожиданием Θ и ковариационной матрицей $(F(\Theta))^{-1}$. В качестве оценки ковариационной матрицы используют $(F\ (\Theta'_{(n)}))^{-1}$.

Алгоритм вычисления наилучших асимптотически нормальных оценок для гамма-распределения с тремя неизвестными параметрами приведен в п. 8.4 настоящего стандарта. Отметим, что для оценок метода моментов

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} s_2\,(x_i,\ \hat{\Theta})=-\frac{\hat{a}}{\hat{b}}+\frac{1}{(\hat{b})^2}(\bar{x}-\hat{c})=0. \quad (34)$$

В соответствии с описанной выше общей схемой построены наилучшие асимптотически нормальные оценки для остальных вариантов оценивания, рассмотренных в разд. 8 настоящего стандарта.

Доказательство асимптотической эффективности и других свойств оценок, определенных по формуле (33), проведено при справедливости некоторых предположений регулярности методами, аналогичными развитым в [16].

6. Расчет таблиц и подбор асимптотических формул

Табл. 1 и 2 взяты из [7], табл. 3 — из [8]. Табл. 4—7 рассчитаны при подготовке настоящего стандарта на основе таблиц функций $\Psi\ (a)$ (см. формулу (3)) и $I(a)=\Psi'\ (a)$ для $1\leqslant a\leqslant 2$, содержащихся в [9]. Для использования стандарта необходимы таблицы значений функций $\Psi\ (a)$ и $I\ (a)$ для более широкой области изменения аргумента a. Они рассчитаны с помощью рекуррентных формул [9]:

$$\Psi(a+1)=\Psi(a)+\frac{1}{a}, \quad (35)$$

$$I(a+1)=I(a)-\frac{1}{a^2}. \quad (36)$$

Была рассчитана также таблица значений функции

$$Q(a) = \ln a - \Psi(a).$$

Таблицы функций G и H, обратных Ψ и Q соответственно, рассчитаны следующим образом: в таблицах значений функций Ψ и Q столбцы аргументов и значений функций поменяли местами, получили таблицы G и H, аргументы в которых менялись неправильным образом; затем табл. 4 и 6 были рассчитаны с помощью правил интерполяции, указанных в соответствующих разделах основной части стандарта.

При разработке данного стандарта выведены приближенные формулы для вычисления значений функций G, I, H, Ψ вне интервалов, охватываемых табл. 4—7 соответственно.

Формулы для малых a найдены исходя из рекуррентных соотношений (35), (36) и аппроксимации типа

$$f(1+x) \sim f(1) + xf'(1) \tag{37}$$

при малом, x, где f — любая из рассматриваемых функций.

Формулы для больших a были подобраны, исходя из формул (35), (36) и варианта формулы суммирования Эйлера-Маклорена, введенного и обоснованного в [10], [11]. Этот вариант отличается от обычной формулы Эйлера — Маклорена [12] тем, что значение функции в точке приближается рядом, коэффициенты которого — приращения нечетных производных этой функции по отрезку, симметричному относительно рассматриваемой точки (первый член ряда определяется интегралом рассматриваемой функции по указанному отрезку).

П. 3.4 настоящего стандарта основан на аппроксимации Р. Фишера [1]: случайная величина $\sqrt{2\chi^3_p}$, где χ^2_p имеет хи-квадрат распределение с p степенями свободы, имеет при большом p приблизительно нормальное распределение с математическим ожиданием $\sqrt{2p-1}$ и дисперсией 1.

Материал разд. 1 настоящего стандарта основан на [7, 13], разд. 2—на [1—3], разд. 3 — на [7], разд. 4 — на [14], разд. 9 — на [6, 8]. Правила разд. 5—8 основаны на исследованиях, проведенных при подготовке настоящего стандарта. Эти исследования выполнены в соответствии с методологией математической статистики [1—4, 8, 16] и ГОСТ 11.001-73 — ГОСТ 11.010-81.

Ряд полезных сведений о гамма-распределении содержится в [13, 18].

ПРИЛОЖЕНИЕ 4
Справочное

ОБОЗНАЧЕНИЯ, ПРИМЕНЯЕМЫЕ В СТАНДАРТЕ

Обозначение	Наименование обозначения	Номер пункта, где впервые встречается обозначение
X, Y, Z	Случайная величина	1.1
a	Параметр формы	1.1
b	Параметр масштаба	1.1
c	Параметр сдвига	1.1
$\Gamma(a)$	Гамма-функция	1.1
$f(x; a, b, c)$	Плотность гамма-распределения с параметрами формы a, масштаба b и сдвига c	1.1
ν	Число степеней свободы у распределения хи-квадрат	1.2
n	Объем выборки	2.1
$x_1, x_2, \ldots, x_n$	Полная выборка объема n из гамма-распределения	2.1
$1-\alpha$	Доверительная вероятность	2.9
$a_в, b_в, c_в$	Верхние доверительные границы параметров a, b, c соответственно	2.7
$1-\alpha_в$	Доверительная вероятность, соответственно которой определяются верхние доверительные границы параметров	2.7
$a_н, b_н, c_н$	Нижние доверительные границы параметров a, b, c соответственно	2.8
$1-\alpha_н$	Доверительная вероятность, соответственно которой определяются нижние доверительные границы параметров	2.8
a^*, b^*, c^*	Оценки параметров a, b, c соответственно, полученные методом максимального правдоподобия или методом наилучших асимптотически нормальных оценок	3.1
$r_1(\alpha, m)$	Коэффициент, определяющий нижнюю доверительную границу для параметра масштаба при известном параметре формы ($m=na$) и $c=0$	3.2
$r_2(\alpha, m)$	Коэффициент, определяющий верхнюю доверительную границу для параметра масштаба при известном параметре формы ($m=na$) и $c=0$	3.3

Продолжение

Обозначение	Наименование обозначения	Номер пункта, где впервые встречается обозначение
u_α	Квантиль нормального распределения с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1, соответствующая доверительной вероятности $1-\alpha$	3.5
$\Psi(a)$	Пси-функция, логарифмическая производная гамма-функции	8.4.7
$G(x)$	Функция, обратная к пси-функции	4.1
$(\sigma^*(a^*))^2, (\sigma^*(b^*))^2, (\sigma^*(c^*))^2$	Оценки дисперсий оценок a^*, b^*, c^* соответственно, полученные подстановкой в выражения для их дисперсий вместо истинных значений параметров оценок максимального правдоподобия	4.5
$I(a)$	Производная пси-функции	4.5
$\widehat{a}, \widehat{b}, \widehat{c}$	Оценки параметров a, b, c соответственно, полученные методом моментов	5.2
$\overline{x}$	Среднее арифметическое наблюдений	5.2
s^2	Выборочная дисперсия наблюдений	5.2
δ	Относительная погрешность наблюдений	5.3
A, B	Величины, используемые при выборе метода оценивания	5.3
Δ	Абсолютная погрешность наблюдений	5.4
$\widehat{\sigma}^2(\widehat{a}), \widehat{\sigma}^2(\widehat{b}), \widehat{\sigma}^2(\widehat{c})$	Оценки дисперсий оценок $\widehat{a}$, $\widehat{b}$, $\widehat{c}$ соответственно, полученные подстановкой в выражения для их дисперсий вместо истинных значений параметров оценок метода моментов	6.3
$H(x)$	Функция, обратная к $\ln a-\Psi(a)$	7.1
m_3	Выборочный третий центральный момент	8.3
$x_{\min}$	Минимальное из наблюдений	8.3
d_1, d_2, k_1, k_2	Вспомогательные величины, вычисляемые при определении наилучших асимптотически нормальных оценок	8.4
$A(\widehat{a}), B(\widehat{a}), A(a^*), B(a^*)$	Вспомогательные функции, используемые при нахождении матрицы рассеивания	8.4.3
$g_{11}, g_{12}, g_{21}, g_{22}, g_{31}, g_{32}$	Коэффициенты поправок (к оценкам метода моментов), вычисляемых при определении наилучших асимптотически нормальных оценок (все параметры неизвестны)	8.4.4
$\Delta a, \Delta b, \Delta c$	Поправки к оценкам метода моментов	8.4.5

Продолжение

Обозначение	Наименование обозначения	Номер пункта, где впервые встречается обозначение
k, g_1 g_2	Вспомогательные величины, вычисляемые при оценке параметров масштаба и сдвига (параметр формы известен)	8.8
g_{11}', g_{12}', g'_{21}, g_{22}'	Коэффициенты поправок при известном параметре масштаба	8.12
$f\ (x)$	Произвольная функция от x, например, одна из рассматриваемых в стандарте	9.1
$f\ (x;\ a)$	Плотность стандартного гамма-распределения	Приложение 2
$\Phi\ (x)$	Функция нормального распределения с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией	Приложение 2
L	Логарифмическая функция правдоподобия	Приложение 3
$\frac{dL}{da}$, $\frac{dL}{db}$	Частные производные логарифмической функции правдоподобия по параметрам a, b соответственно	Приложение 3
$Q\ (a)$	Функция, равная $\ln a - \Psi\ (a)$	Приложение 3
ν_1	Мера точности оценки максимального правдоподобия	Приложение 3
ν_2	Мера точности оценки метода моментов	Приложение 3
$f\ (x,\ \Theta)$	Плотность распределения вероятностей, зависящая от параметра Θ	Приложение 3
k	Размерность параметрического пространства	Приложение 3
$F\ (\Theta)$	Информационная матрица Фишера	Приложение 3
$S\ (x,\ \Theta)$	Вектор частных производных логарифма плотности	Приложение 3
$t_n\ (\Theta)$	Вектор, используемый при вычислении наилучших асимптотически нормальных оценок	Приложение 3
$\Theta_{(n)}$	Оценки, на основе которых строятся наилучшие асимптотически нормальные оценки	Приложение 3
$\Theta'_{(n)}$	Наилучшие асимптотически нормальные оценки	Приложение 3

ЛИТЕРАТУРА

1. Крамер Г. Математические методы статистики. — М.: Мир, 1975.
2. Кендалл М. Дж., Стьюарт А. Статистические выводы и связи. — М.: Наука, 1973.
3. Уилкс С. Математическая статистика. — М.: Наука, 1967.
4. Орлов А. И. Устойчивость в социально-экономических моделях. — М.: Наука, 1979.
5. Смоляк С. А., Титаренко Б. П. Устойчивые методы оценивания. — М.: Статистика, 1980.
6. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. — М.: ГИФМЛ, 1962 (9 изд.).
7. Шор Я. Б. Статистические методы анализа и контроля качества и надежности. — М.: Советское радио, 1962.
8. Большев Л. Н., Смирнов Н. В. Таблицы математической статистики. — М.: ВЦ АН СССР, 1968.
9. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. — М.: Наука, 1964.
10. Орлов А. И. Скорость сходимости распределения статистики Мизеса—Смирнова. — Теория вероятностей и ее применения, 1974, т. 19, № 4, с. 766—786.
11. Орлов А. И. Оценки скорости сходимости распределений статистик интегрального типа. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. — М.: ЦЭМИ АН СССР, 1975.
12. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том. 2 — М.: Наука, 1966.
13. Johnson N. L., Kotz S. Distributions in statistics. Continuous univariate distributions-1. — New York-Chichester-Beisbane-Toronto, Jonh Wiley and Sons, 1976.
14. Бендерский А. М., Невельсон М. Б. Оценивание параметра формы гамма-распределения. — Надежность и контроль качества, 1981, № 10, с. 14—21.
15. Шор Я. Б., Кузьмин Ф. И. Таблицы для анализа и контроля надежности. — М.: Советское радио, 1968.
16. Закс Ш. Теория статистических выводов. — М.: Мир, 1975.
17. Burgin T. A. The gamma distribution and inventory control. — Operational Research Quarterly, 1975, v. 26, № 3, p. 507—525.
18. Communication of statistics, ser. B, 1982, v. 11, № 4, p. 377—519.
19. Вениаминов Ю. С. О выборе нормируемых показателей надежности. — Стандарты и качество, 1983, № 5.

СОДЕРЖАНИЕ

Редактор *Н. В. Бобкова*
Технический редактор *В. И. Тушева*
Корректор *Г. М. Фролова*

Сдано в наб. 04.07.84. Подп. в печ. 11.11.84. 3,25 усл. п. л. 3,375 усл. кр.-отт. 3,14 уч.-изд. л. Тир. 6000. Цена 15 коп.

Ордена «Знак Почета» Издательство стандартов, 123840, Москва, ГСП, Новопресненский пер., 3
Тип. «Московский печатник», Москва, Лялин пер., 6. Зак. 812