ГОСУДАРСТВЕННЫЙ СТАНДАРТ
СОЮЗА ССР

ПРИКЛАДНАЯ СТАТИСТИКА

ПРАВИЛА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОЦЕНОК И ДОВЕРИТЕЛЬНЫХ ГРАНИЦ ДЛЯ ПАРАМЕТРОВ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПУАССОНА

ГОСТ 11.005—74

Издание официальное

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ СССР ПО СТАНДАРТАМ
Москва

УДК 311.11 : 006.354 Группа Т59

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ СТАНДАРТ СОЮЗА ССР

Прикладная статистика

ПРАВИЛА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОЦЕНОК И ДОВЕРИТЕЛЬНЫХ ГРАНИЦ ДЛЯ ПАРАМЕТРОВ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПУАССОНА

Applied statistics. Estimation of values and confidence intervals for exponential distribution and Poisson distribution parameters

ГОСТ 11.005—74

Постановлением Государственного комитета стандартов Совета Министров СССР от 8 июля 1974 г. № 1641 срок введения установлен

с 01.01.75

Настоящий стандарт устанавливает правила определения оценок и доверительных границ для параметров экспоненциального распределения и распределения Пуассона по совокупности статистических опытных данных, полученных на производстве в процессе измерений, испытаний и анализов, если эти опытные данные подчиняются экспоненциальному распределению или распределению Пуассона.

Стандарт содержит два справочных приложения, в которых даны примеры применения правил стандарта, общие понятия и обозначения, а также кратко изложены теоретические основы стандарта.

1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

1.1. Правила определения оценок и доверительных границ для параметров экспоненциального распределения изложены в настоящем стандарте для двух случаев:

а) полностью определенная выборка объема n, т. е. такая выборка, в которой все значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ случайной величины x определены;

б) неполностью определенная выборка объема n, т. е. такая выборка, в которой известны только m значений случайной величины $x (m<n)$: $x_1, \ldots, x_m$, а про остальные $n—m$ значений известно только, что эти значения больше некоторого числа x_u.

Правила определения оценок и доверительных границ для параметра распределения Пуассона изложены для случая полностью определенной выборки.

Издание официальное

★

Переиздание. Апрель 1984 г.

1.2. Определение оценок и доверительных границ для экспоненциального распределения на практике чаще всего проводится для расчета характеристик надежности по результатам специально организованных испытаний или наблюдений.

В табл. 1 приведены характеристики двенадцати наиболее часто применяемых планов испытаний на надежность. Их можно разделить на три группы:

планы с индексом R, т. е. планы испытаний невосстанавливаемых объектов, согласно которым отказавшие во время испытаний объекты заменяются новыми;

планы с индексом U, т. е. планы испытаний невосстанавливаемых объектов, согласно которым отказавшие во время испытаний объекты не заменяются новыми;

планы с индексом M, т. е. планы испытаний восстанавливаемых объектов, согласно которым после каждого отказа работоспособность объекта восстанавливается.

1.3. При испытаниях невосстанавливаемых объектов по плану $[N, U, r]$ при $r=N$ получается полностью определенная выборка значений x_i. При остальных планах испытаний невосстанавливаемых объектов, приведенных в табл. 1, получаются, как правило, неполностью определенные выборки.

При испытаниях восстанавливаемых объектов по плану $[N, M, r]$ при любом r получается полностью определенная выборка. При остальных планах испытаний восстанавливаемых объектов, приведенных в табл. 1, получаются, как правило, неполностью определенные выборки.

1.4. Планы испытаний $[N, U, (r, T)]$, $[N, M, (r, T)]$, $[N, R, (r, T)]$, $[N, M, (r_\Sigma, T_\Sigma)]$ в дальнейшем называются двойственными, в отличие от остальных планов в табл. 1, которые называются простыми.

При окончании испытаний по каждому двойственному плану получается результат, который соответствует одному из двух простых планов, кроме плана $[N, M, (r, T)]$. Так, например, если при испытаниях по плану $[N, U, (r, T)]$ раньше получается r отказов, чем достигается время T, то двойственный план $[N, U, (r, T)]$ приводит к тому же результату, что и простой план $[N, U, r]$.

1.5. Планы испытаний, приведенные в табл. 1, могут применяться не только для испытаний на надежность; эти планы применимы и в тех случаях, когда случайная величина x имеет физический смысл, не связанный с надежностью.

Таблица 1

Характеристики планов испытаний на надежность

Номер плана j	Индекс плана j; выражение m_j; выражение S_j	Описание плана
	Планы для объектов, не восстанавливаемых в процессе испытаний	
1	$[N, R, T]$; $0 \leqslant m_1 \leqslant N$; $S_1 = NT$	План испытаний, согласно которому начинают испытывать N объектов; отказавшие во время испытаний объекты заменяются новыми, а испытания прекращаются по истечении времени T
2	$[N, R, r]$; $m_2 = r > 0$; $S_2 = Nx_r$	План испытаний, согласно которому начинают испытывать N объектов; отказавшие во время испытаний объекты заменяются новыми, а испытания прекращаются, когда число отказавших объектов достигает r
3	$[N, R, (r, T)]$; $m_3 = m_1$ или m_2; $S_3 = S_1$ или S_2 (см. п. 2.2)	План испытаний, согласно которому начинают испытывать N объектов; отказавшие во время испытаний объекты заменяются новыми, а испытания прекращаются, когда число отказавших объектов достигает r или по истечении времени T — в зависимости от того, какое из этих условий будет раньше выполнено
4	$[N, U, T]$; $0 \leqslant m_4 \leqslant N$; $S_4 = \sum_{i=1}^{m_4} x_i + (N - m_4)T$	План испытаний, согласно которому испытаниям подлежат N объектов; отказавшие во время испытаний объекты новыми не заменяются, а испытания прекращаются по истечении времени T
5	$[N, U, r]$; $m_5 = r > 0$; $S_5 = \sum_{i=1}^{m_5} x_i + (N - m_5)x_r$	План испытаний, согласно которому испытаниям подлежат N объектов; отказавшие во время испытаний объекты новыми не заменяются, а испытания прекращаются, когда число отказавших объектов достигает r. Примечание: При $r = N$ имеем случай полностью определенной выборки.
6	$[N, U, (r, T)]$; $m_6 = m_4$ или m_5; $S_6 = S_4$ или S_5 (см. п. 2.2)	План испытаний, согласно которому испытаниям подлежат N объектов; отказавшие во время испытаний объекты новыми не заменяются, а испытания прекращаются, когда число отказавших объектов достигает r или по истечении времени T — в зависимости от того, какое из этих условий будет раньше выполнено

Продолжение табл. 1

Номер плана i	Индекс плана i; выражение m_i; выражение S_i	Описание плана
	Планы для объектов, восстанавливаемых в процессе испытаний	
7	$[N, M, T]$; $m_7 \geqslant 0$; $S_7 = NT$	План испытаний, согласно которому испытаниям подлежат N объектов; после каждого отказа работоспособность объекта восстанавливается, каждый объект испытывается до наработки T
8	$[N, M, r]$; $m_8 = Nr > 0$; $S_8 = \sum\limits_{i=1}^{N} x_{r_i}$	План испытаний, согласно которому испытаниям подлежат N объектов; после каждого отказа работоспособность объекта восстанавливается, каждый объект испытывается до возникновения у него r отказов
9	$[N, M, (r, T)]$; $0 \leqslant m_9 \leqslant Nr$; $0 \leqslant S_9 \leqslant NT$ (см. п. 2.2)	План испытаний, согласно которому испытаниям подлежат N объектов; после каждого отказа работоспособность объекта восстанавливается, каждый объект испытывается либо до возникновения r отказов, либо до наработки T, в зависимости от того, какое из этих условий будет выполнено раньше
10	$[N, M, r_\Sigma]$; $m_{10} = r_\Sigma > 0$; $S_{10} = \sum\limits_{k=1}^{N} x''_k$	План испытаний, согласно которому испытаниям подлежат N объектов; после каждого отказа работоспособность объекта восстанавливается, испытания прекращаются при возникновении суммарного числа r_Σ отказов с учетом всех объектов
11	$[N, M, T_\Sigma]$; $m_{11} \geqslant 0$; $S_{11} = T_\Sigma$	План испытаний, согласно которому испытаниям подлежат N объектов; после каждого отказа работоспособность объекта восстанавливается, испытания прекращаются при получении T_Σ — суммарной наработки всех объектов
12	$[N, M, (r_\Sigma\ T_\Sigma)]$; $m_{12} = m_{10}$ или m_{11}; $S_{12} = S_{10}$ или S_{11} (см. п. 2.2)	План испытаний, согласно которому испытаниям подлежат N объектов; после каждого отказа работоспособность объекта восстанавливается, испытания прекращаются при возникновении суммарного числа r_Σ отказов с учетом всех объектов или при получении T_Σ — суммарной наработки всех объектов, в зависимости от того, какое из этих условий будет выполнено раньше

Примечания:

1. В планах 1—6 параметр λ экспоненциального распределения называется интенсивностью отказов.

2. В планах 7—12 имеет место простейший поток отказов, параметр которого обычно обозначается через Λ. В настоящем стандарте для унификации используется обозначение λ вместо Λ.

3. S_j — суммарная наработка всех объектов за время испытаний по j-му плану; m_j — суммарное число отказов за время испытаний; x_i — наработка i-го объекта до отказа; x'_{r_i} — наработка i-го объекта до r-го отказа; x''_i — наработка i-го объекта полностью за время испытаний. В дальнейшем (табл. 2—5) вместо S_j употребляется обозначение S, а вместо m_j — обозначение m.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОЦЕНОК ПАРАМЕТРОВ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

2.1. Экспоненциальное распределение имеет один параметр λ, который связан со средним значением a случайной величины x соотношением

$$\lambda=\frac{1}{a}. \tag{1}$$

Оценка среднего значения a случайной величины x будет обозначаться $\bar{x}$; оценка параметра λ будет обозначаться $\bar{\lambda}$.

Выражения для оценок $\bar{x}$ приведены в табл. 2.

В случае полностью определенной выборки объема n несмещенная оценка для a определяется по формуле:

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i. \tag{2}$$

При всех планах испытаний, указанных в табл. 1, оценка для a определяется по формуле

$$\bar{x}=\frac{S}{m}, \tag{3}$$

где S — суммарная наработка всех объектов за время испытаний;

m — суммарное число отказов всех объектов за время испытаний ($m>0$).

Оценка по уравнению (3) в одних случаях является смещенной, в других — несмещенной, как указано в табл. 2.

2.2. Можно пользоваться табл. 2 для двойственных планов, входя в эту таблицу с тем простым планом, к которому привели результаты испытаний по двойственному плану.

В случае плана $[N, M, (r, T)]$ для приближенного определения оценок и доверительных границ можно использовать формулу для плана $[N, M, T_\Sigma]$.

2.3. Если имеется несколько полностью определенных выборок любого объема из одной и той же генеральной совокупности, то несмещенную оценку $\bar{x}$ можно определить по уравнению (2), объединив все эти выборки в одну общую выборку.

Если имеются результаты нескольких серий испытаний объектов из одной и той же генеральной совокупности по одному и тому же плану, то можно получить общую оценку $\bar{x}$ по всем этим испытаниям, используя уравнение (3). При этом S и m будут относиться ко всей совокупности результатов испытаний.

2.4. Выражения для оценок $\bar{\lambda}$ приведены в табл. 3.

Для нахождения оценок $\bar{\lambda}$ в случае двойственных планов испытаний, не указанных в табл. 3, используются выражения для соответствующих простых планов, как указано в п. 2.2.

Таблица 2

Выражения для оценок $\bar{x}$

Случай	$\bar{x}$
1. Полностью определенная выборка	Несмещенная оценка $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$
2. Испытания по планам $[N, R, T]$, $[N, M, T]$, $[N, M, T_\Sigma]$	Смещенная оценка при $m>0$ $\frac{S}{m}$
3. Испытания по плану $[N, U, T]$	Смещенная оценка при $m>0$ $\frac{S}{m}$
4. Испытания по планам $[N, R, r]$, $[N, U, r]$, $[N, M, r]$, $[N, M, r_\Sigma]$	Несмещенная оценка при $m>0$ $\frac{S}{m}$

Обозначения см. в табл. 1.

Таблица 3

Выражения для оценок $\bar{\lambda}$

Случай	$\bar{\lambda}$
1. Полностью определенная выборка	Несмещенная оценка при $n>1$ $\frac{n-1}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$

Продолжение табл. 3

Случай	$\overline{\lambda}$
	Смещенная оценка при $n=1$ $\dfrac{1}{x_1}$
2. Испытания по планам $[N, R, T]$, $[N, M, T]$, $[N, M, T_{\Sigma}]$	Несмещенная оценка $\dfrac{m}{S}$
3. Испытания по плану $[N, U, T]$	Смещенная оценка $\dfrac{m}{S}$
4. Испытания по планам $[N, R, r]$, $[N, U, r]$, $[N, M, r]$, $[N, M, r_{\Sigma}]$	Несмещенная оценка при $m>1$ $\dfrac{m-1}{S}$
	Смещенная оценка при $m=1$ $\dfrac{1}{S}$

Обозначения см. в табл. 1.

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДОВЕРИТЕЛЬНЫХ ГРАНИЦ ДЛЯ ПАРАМЕТРОВ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

3.1. Выражения для $a_{н}$ и $a_{в}$ — соответственно нижней и верхней доверительных границ величины a при односторонней доверительной вероятности γ представлены в табл. 4.

При этом следует пользоваться соответствующими оценками из табл. 2 (кроме плана $[N, U, T]$).

Для нахождения доверительных границ в случае двойственных планов испытаний, не указанных в табл. 4, используются выражения для соответствующих простых планов, как указано в п. 2.2.

3.2. Доверительные границы для a в случае плана $[N, U, T]$ находятся из подпункта 3 табл. 4. В случае $m>0$ они выражаются через величины $p_{н}$, $p_{в}$, которые определяются следующим образом:

$$p_{н}=1-\frac{m}{NR_2}, \qquad (4)$$

$$p_{в}=1-\frac{m}{NR_1}, \qquad (5)$$

где R_1, R_2 определяются по следующим формулам:

в случае

$$m<\frac{N-1}{2}$$

$$R_1=r_1\left(1-\frac{m}{2N}\right)+\frac{m}{2N}, \qquad (6)$$

$$R_2=r_2\left(1-\frac{m}{2N}\right)+\frac{m}{2N}; \qquad (7)$$

в случае

$$m\geqslant\frac{N-1}{2}$$

$$R_1=\frac{m\left(N+m+1+\frac{N-m}{r'_2}\right)}{N\left(N+m+1-\frac{N-m}{r'_1}\right)}, \qquad (8)$$

$$R_2=\frac{m\left(N+m+1+\frac{N-m}{r'_1}\right)}{N\left(N+m+1-\frac{N-m}{r'_2}\right)}. \qquad (9)$$

Коэффициенты r_1 и r_2 находятся по табл. 6 и 7, в которые надо входить с величинами γ и m.

Коэффициенты r_1' и r_2' находятся по табл. 6 и 7, в которые надо входить с величинами γ и $m'=N-m$.

Если m мало по сравнению с N ($m<0,1N$), то приближенно доверительные границы для a в случае плана $[N, U, T]$ можно находить по тем же правилам, что и для плана $[N, R, T]$.

3.3. Выражения для $\lambda_н$ и $\lambda_в$ — соответственно нижней и верхней доверительных границ параметра λ при односторонней доверительной вероятности γ представлены в табл. 5. При этом следует пользоваться соответствующими оценками из табл. 3 (кроме плана $[N, U, T]$).

Для нахождения доверительных планов испытаний, не указанных в табл. 5, используются выражения для соответствующих простых планов, как указано в п. 2.2.

Доверительные границы в случае плана $[N, U, T]$ находятся с использованием уравнений и указаний п. 3.2 и уравнений

$$\lambda_н=\frac{1}{a_в},$$

$$\lambda_в=\frac{1}{a_н},$$

Таблица 4

Выражения для доверительных границ $a_н$ и $a_в$

Случай	$a_н$	$a_в$
1. Полностью определенная выборка	$r_3\bar{x}$	$r_1\bar{x}$
2. Испытания по планам $[N, R, T]$, $[N, M, T]$, $[N, M, T_\Sigma]$	$m>0$ $r_2\bar{x}$	$m>0$ $r_1\bar{x}$
	$m=0$ $\frac{S}{r_0}$	$m=0$ ∞
3. Испытания по плану $[N, U, T]$ (см. п. 3.2)	$m>0$ $-\frac{T}{\ln p_н}$	$m>0$ $-\frac{T}{\ln p_в}$
	$m=0$ $\frac{S}{r_0}$	$m=0$ ∞
4. Испытания по планам $[N, R, r]$, $[N, U, r]$, $[N, M, r]$, $[N, M, r_\Sigma]$	$r_3\bar{x}$	$r_1\bar{x}$

Примечание. Оценка x определяется по соответствующей строке табл. 2, коэффициенты r_1, r_2, r_3, r_0 определяются из табл. 6, 7, 8 и 11 по γ и m или n, остальные обозначения — см. табл. 1.

Таблица 5

Выражения для доверительных границ $\lambda_н$ и $\lambda_в$

Случай	$\lambda_н$	$\lambda_в$
1. Полностью определенная выборка	$n>1$ $\frac{\bar{\lambda}}{r_5}$	$n>1$ $\frac{\bar{\lambda}}{r_4}$
	$n=1$ $\frac{\bar{\lambda}}{r_1}$	$n=1$ $\frac{\bar{\lambda}}{r_2}$

Продолжение табл. 5

Случай	$\lambda_н$	$\lambda_в$
2. Испытания по планам [N, R, T], [N, M, T], [N, M, T_Σ]	$m \geq 0$ $\frac{\bar{\lambda}}{r_1}$	$m \geq 0$ $\frac{\bar{\lambda}}{r_2}$
	$m=0$ 0	$m=0$ $\frac{r_0}{S}$
3. Испытания по плану [N, U, T] (см. п. 3.2)	$m>0$ $-\frac{\ln p_в}{T}$	$m>0$ $-\frac{\ln p_н}{T}$
	$m=0$ 0	$m=0$ $\frac{r_0}{S}$
4. Испытания по планам [N, R, r], [N, U, r], [N, M, r], [N, M, r_Σ]	$m \geq 1$ $\frac{\bar{\lambda}}{r_5}$	$m \geq 1$ $\frac{\bar{\lambda}}{r_4}$
	$m=1$ $\frac{\bar{\lambda}}{r_1}$	$m=1$ $\frac{\bar{\lambda}}{r_3}$

Примечание. Оценка $\bar{\lambda}$ определяется по соответствующей строке табл. 3, коэффициенты r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_0 определяются из табл. 6, 7, 8, 9, 10, 11 по γ и m или n, остальные обозначения — см. табл. 1.

4. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПУАССОНА

4.1. Распределение Пуассона имеет один параметр a, который равен математическому ожиданию случайной величины. Оценка этого параметра дается формулой

$$\bar{a}=k, \quad (10)$$

где k — наблюденное значение случайной величины.

4.2. Нижняя и верхняя доверительные границы для параметра a (соответственно ($a_н$ и $a_в$) находятся по следующим формулам: при $k \neq 0$

$$a_н = \frac{k}{r_1}, \tag{11}$$

$$a_в = \frac{k}{r_2}, \tag{12}$$

при $k=0$

$$a_н = 0, \tag{13}$$

$$a_в = r_0. \tag{14}$$

Коэффициенты r_1, r_2 находятся из табл. 6 и 7 по заданному γ и $m=k$; коэффициент r_0 находится из табл. 11.

4.3. Если из партии изделий объема N берется выборка объема n, то случайное число k дефектных изделий в выборке имеет распределение Пуассона при выполнении следующих двух условий:

$n < 0{,}1N$,

доля q дефектных изделий в партии не превосходит 0,1.

При выполнении этих условий параметр a распределения Пуассона находится по формуле

$$a = nq. \tag{15}$$

4.4. Если выполняются условия, указанные в п. 4.3, и в выборке объема n обнаружено k дефектных изделий, то оценка доли q дефектных изделий в партии находится по формуле

$$\bar{q} = \frac{k}{n}. \tag{16}$$

Доверительные границы для q при $k \neq 0$ находят по формулам

$$q_н = \frac{\bar{q}}{r_1}, \tag{17}$$

$$q_в = \frac{\bar{q}}{r_2}. \tag{18}$$

Если $k=0$, то

$$q_в = \frac{r_0}{n}, \tag{19}$$

$$q_н = 0, \tag{20}$$

Таблица 6

m	Значения коэффициента r_1 при односторонней доверительной вероятности γ							
	0,80	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995	0,9975	0,999
1	4,48	9,48	19,5	39,52	100	200	400	1000
2	2,42	3,77	5,63	8,26	13,50	19,50	28,57	44,05
3	1,95	2,73	3,66	4,85	6,88	8,88	11,47	15,75
4	1,74	2,29	2,93	3,67	4,85	5,95	7,25	9,33
5	1,62	2,05	2,54	3,07	3,91	4,63	5,48	6,78
6	1,54	1,90	2,29	2,72	3,36	3,91	4,55	5,42
7	1,48	1,80	2,13	2,48	3,00	3,44	3,91	4,60
8	1,43	1,72	2,01	2,32	2,75	3,11	3,50	4,06
9	1,40	1,66	1,92	2,18	2,57	2,87	3,20	3,67
10	1,37	1,61	1,83	2,09	2,42	2,69	2,98	3,38
11	1,34	1,57	1,78	2,00	2,31	2,54	2,80	3,15
12	1,33	1,53	1,73	1,94	2,21	2,43	2,66	2,97
13	1,31	1,50	1,69	1,88	2,13	2,33	2,54	2,82
14	1,29	1,47	1,65	1,83	2,06	2,25	2,44	2,69
15	1,28	1,46	1,62	1,79	2,01	2,18	2,36	2,59
16	1,27	1,44	1,59	1,75	1,96	2,11	2,28	2,50
18	1,25	1,40	1,55	1,69	1,87	2,01	2,16	2,35
20	1,24	1,37	1,51	1,64	1,81	1,93	2,06	2,23
25	1,21	1,33	1,44	1,55	1,68	1,78	1,90	2,03
30	1,18	1,29	1,39	1,48	1,60	1,69	1,78	1,89
40	1,16	1,24	1,32	1,40	1,50	1,56	1,67	1,72
50	1,14	1,21	1,28	1,35	1,43	1,48	1,57	1,65
60	1,12	1,19	1,25	1,31	1,38	1,43	1,50	1,54
70	1,11	1,18	1,23	1,28	1,35	1,39	1,45	1,51
80	1,10	1,16	1,21	1,27	1,32	1,37	1,41	1,45
90	1,09	1,15	1,20	1,25	1,30	1,33	1,38	1,44
100	1,09	1,14	1,19	1,23	1,28	1,31	1,36	1,39
150	1,07	1,12	1,15	1,18	1,22	1,25	1,28	1,30
200	1,06	1,10	1,13	1,15	1,19	1,21	1,23	1,26
300	1,05	1,08	1,10	1,12	1,15	1,17	1,19	1,20

Примечание. При $m>100$ значения коэффициента r_1 вычисляются по формуле

$$r_1=\frac{4m}{(\sqrt{4m-1}-u_\gamma)^2}.$$

Значения коэффициента u_γ приведены в табл. 11.

Таблица 7

m	Значения коэффициента r_2 при односторонней доверительной вероятности γ							
	0,80	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995	0,9975	0,999
1	0,33	0,26	0,21	0,18	0,15	0,13	0,12	0,11
2	0,47	0,38	0,32	0,28	0,24	0,21	0,20	0,18
3	0,55	0,45	0,39	0,34	0,30	0,27	0,25	0,23
4	0,60	0,50	0,44	0,39	0,35	0,32	0,30	0,27
5	0,63	0,54	0,48	0,43	0,38	0,35	0,33	0,31
6	0,66	0,57	0,51	0,46	0,41	0,39	0,34	0,32
7	0,68	0,59	0,53	0,49	0,44	0,41	0,37	0,36
8	0,70	0,62	0,55	0,51	0,46	0,43	0,41	0,38
9	0,72	0,63	0,57	0,53	0,48	0,45	0,42	0,40
10	0,73	0,65	0,59	0,54	0,50	0,46	0,44	0,42
11	0,74	0,66	0,60	0,55	0,51	0,48	0,46	0,43
12	0,75	0,67	0,62	0,57	0,53	0,50	0,47	0,44
13	0,76	0,69	0,63	0,58	0,54	0,51	0,48	0,45
14	0,77	0,69	0,64	0,59	0,55	0,52	0,49	0,47
15	0,78	0,70	0,65	0,60	0,56	0,53	0,51	0,48
16	0,79	0,71	0,66	0,61	0,57	0,54	0,52	0,49
18	0,80	0,72	0,67	0,63	0,59	0,56	0,54	0,51
20	0,81	0,74	0,69	0,65	0,60	0,58	0,55	0,53
25	0,83	0,76	0,72	0,68	0,64	0,61	0,59	0,56
30	0,84	0,78	0,74	0,70	0,66	0,64	0,61	0,59
40	0,87	0,81	0,77	0,73	0,70	0,67	0,66	0,63
50	0,88	0,83	0,79	0,76	0,73	0,70	0,69	0,67
60	0,89	0,84	0,81	0,78	0,75	0,72	0,71	0,69
70	0,90	0,85	0,82	0,79	0,76	0,74	0,73	0,71
80	0,90	0,86	0,83	0,81	0,78	0,76	0,74	0,72
90	0,91	0,87	0,84	0,82	0,79	0,77	0,75	0,73
100	0,91	0,88	0,85	0,82	0,80	0,78	0,76	0,75
150	0,93	0,90	0,87	0,85	0,83	0,82	0,80	0,79
200	0,94	0,91	0,89	0,87	0,85	0,84	0,82	0,81
300	0,95	0,93	0,91	0,89	0,88	0,86	0,85	0,84

Примечание. При $m>100$ значения коэффициента r_2 вычисляются по формуле

$$r_2=\frac{4m}{(\sqrt{4m+3}+u_\gamma)^2}.$$

Значения коэффициента u_γ приведены в табл. 11.

Таблица 8

m	Значения коэффициента r_3 при односторонней доверительной вероятности γ							
	0,80	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995	0,9975	0,999
1	0,62	0,43	0,33	0,27	0,22	0,19	0,17	0,14
2	0,67	0,51	0,42	0,36	0,30	0,27	0,24	0,22
3	0,70	0,57	0,48	0,42	0,36	0,32	0,30	0,27
4	0,73	0,60	0,52	0,46	0,40	0,36	0,34	0,31
5	0,75	0,62	0,55	0,49	0,43	0,40	0,37	0,34
6	0,76	0,65	0,57	0,51	0,46	0,42	0,40	0,37
7	0,77	0,66	0,59	0,54	0,48	0,45	0,42	0,39
8	0,78	0,68	0,61	0,56	0,50	0,47	0,44	0,41
9	0,79	0,69	0,62	0,57	0,52	0,48	0,46	0,43
10	0,80	0,70	0,64	0,59	0,53	0,50	0,47	0,44
11	0,80	0,71	0,65	0,60	0,55	0,51	0,49	0,46
12	0,81	0,72	0,66	0,61	0,56	0,53	0,50	0,47
13	0,82	0,73	0,67	0,62	0,57	0,54	0,51	0,48
14	0,82	0,74	0,68	0,63	0,58	0,55	0,52	0,49
15	0,83	0,74	0,68	0,64	0,59	0,56	0,53	0,50
16	0,83	0,75	0,69	0,65	0,60	0,57	0,54	0,51
18	0,84	0,76	0,71	0,66	0,61	0,58	0,56	0,53
20	0,85	0,77	0,72	0,67	0,63	0,60	0,58	0,55
25	0,86	0,79	0,74	0,70	0,66	0,63	0,60	0,58
30	0,87	0,80	0,76	0,72	0,68	0,65	0,63	0,60
40	0,88	0,83	0,78	0,75	0,71	0,69	0,67	0,64
50	0,89	0,84	0,80	0,77	0,74	0,71	0,70	0,67
60	0,90	0,86	0,82	0,79	0,76	0,73	0,72	0,70
70	0,91	0,87	0,83	0,80	0,77	0,75	0,74	0,71
80	0,91	0,87	0,84	0,81	0,78	0,77	0,75	0,73
90	0,92	0,88	0,85	0,82	0,79	0,78	0,76	0,74
100	0,92	0,88	0,86	0,83	0,80	0,79	0,77	0,75
150	0,93	0,90	0,88	0,86	0,84	0,82	0,81	0,79
200	0,94	0,92	0,89	0,87	0,86	0,84	0,83	0,81
300	0,95	0,93	0,91	0,90	0,88	0,87	0,86	0,84

Примечание. При $m > 100$ значения коэффициента r_3 вычисляются по формуле

$$r_3 = \frac{4m}{(\sqrt{4m-1} + u_\gamma)^2}.$$

Значения коэффициента u_γ приведены в табл. 11.

Таблица 9

m	Значения коэффициента r_4 при односторонней доверительной вероятности γ							
	0,80	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995	0,9975	0,999
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0,33	0,26	0,21	0,18	0,15	0,13	0,12	0,11
3	0,47	0,38	0,32	0,28	0,24	0,21	0,20	0,18
4	0,55	0,45	0,39	0,34	0,30	0,21	0,25	0,23
5	0,60	0,50	0,44	0,39	0,35	0,32	0,30	0,27
6	0,63	0,54	0,48	0,43	0,38	0,35	0,33	0,31
7	0,66	0,57	0,51	0,46	0,41	0,39	0,36	0,32
8	0,68	0,59	0,53	0,49	0,44	0,41	0,38	0,36
9	0,70	0,62	0,55	0,51	0,46	0,43	0,41	0,38
10	0,72	0,63	0,57	0,53	0,48	0,45	0,42	0,40
11	0,73	0,65	0,59	0,54	0,50	0,46	0,44	0,42
12	0,74	0,66	0,60	0,55	0,51	0,48	0,46	0,43
13	0,75	0,67	0,62	0,57	0,53	0,50	0,47	0,44
14	0,76	0,69	0,63	0,58	0,54	0,51	0,48	0,45
15	0,77	0,69	0,64	0,59	0,55	0,52	0,49	0,47
16	0,78	0,70	0,65	0,60	0,56	0,53	0,51	0,48
18	0,79	0,72	0,67	0,62	0,58	0,55	0,53	0,50
20	0,81	0,73	0,68	0,64	0,60	0,57	0,55	0,51
25	0,83	0,76	0,71	0,67	0,63	0,60	0,58	0,56
30	0,84	0,77	0,73	0,70	0,66	0,63	0,61	0,58
40	0,86	0,81	0,76	0,73	0,69	0,67	0,65	0,62
50	0,87	0,82	0,78	0,75	0,73	0,70	0,69	0,66
60	0,88	0,85	0,80	0,78	0,75	0,72	0,71	0,69
70	0,90	0,86	0,82	0,79	0,76	0,74	0,73	0,70
80	0,90	0,86	0,83	0,80	0,77	0,76	0,74	0,72
90	0,91	0,87	0,84	0,81	0,78	0,77	0,75	0,73
100	0,91	0,87	0,85	0,82	0,79	0,78	0,76	0,74
150	0,92	0,89	0,87	0,85	0,83	0,81	0,80	0,78
200	0,93	0,91	0,89	0,87	0,85	0,84	0,83	0,81
300	0,95	0,93	0,91	0,90	0,88	0,87	0,86	0,84

Примечание. При $m>100$ значения коэффициента r_4 вычисляются по формуле

$$r_4=\frac{m-1}{m} \qquad r_3=\frac{4(m-1)}{(\sqrt{4m-1}+u_\gamma)^2}.$$

Значения коэффициента u_γ приведены в табл. 11.

Таблица 10

m	Значения коэффициента r_5 при односторонней доверительной вероятности γ							
	0,80	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995	0,9975	0,999
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1,21	1,88	2,81	4,13	6,75	9,75	14,28	22,02
3	1,30	1,82	2,44	3,23	4,58	5,92	7,65	10,50
4	1,31	1,72	2,20	2,75	3,64	4,46	5,44	7,00
5	1,30	1,64	2,03	2,46	3,13	3,70	4,38	5,41
6	1,28	1,58	1,91	2,27	2,80	3,25	3,80	4,52
7	1,27	1,54	1,82	2,13	2,57	2,95	3,35	3,94
8	1,25	1,51	1,76	2,09	2,41	2,72	3,06	3,55
9	1,24	1,47	1,71	1,94	2,28	2,56	2,84	3,26
10	1,23	1,45	1,65	1,88	2,18	2,42	2,68	3,04
11	1,22	1,43	1,62	1,82	2,10	2,40	2,55	2,86
12	1,22	1,40	1,59	1,78	2,03	2,23	2,44	2,72
13	1,20	1.38	1,56	1,74	1,97	2,15	2,34	2,60
14	1,19	1,37	1,53	1,70	1,91	2,08	2.27	2,50
15	1,19	1,36	1,51	1,67	1,87	2,03	2,20	2,42
16	1,19	1,35	1,49	1,64	1,84	1,98	2,14	2,34
18	1,18	1,32	1,46	1,60	1.77	1,90	2,04	2,22
20	1,18	1,30	1,43	1,56	1,72	1,83	1,96	2,12
25	1,16	1,28	1,38	1,49	1,61	1,71	1,82	1,95
30	1,14	1,25	1,34	1,43	1,55	1,63	1,72	1,83
40	1,13	1,21	1,29	1,36	1,46	1,52	1,63	1,67
50	1,12	1,19	1,25	1,32	1,40	1,45	1,54	1,62
60	1,10	1,17	1,23	1,29	1,36	1,41	1,47	1,51
70	1,09	1,16	1,21	1,26	1,33	1,37	1,43	1,49
80	1,09	1,15	1,20	1,25	1,30	1,35	1,39	1,44
90	1,08	1,14	1,18	1,24	1,28	1,33	1,36	1,41
100	1,08	1,12	1,18	1,22	1,27	1,30	1,35	1,39
150	1,06	1,11	1,14	1,17	1,21	1,24	1,27	1,30
200	1,05	1,09	1,12	1,14	1,18	1,20	1,22	1,25
300	1,05	1,08	1,10	1,12	1,15	1,16	1,19	1,21

Примечание. При $m>100$ значения коэффициента r_5 вычисляются по формуле

$$r_5=\frac{m-1}{m} \quad r_1=\frac{4(m-1)}{(\sqrt{4m-1}-u_\gamma)^2}$$

Значения коэффициента u_γ приведены в табл. 11.

Таблица 11

Значения коэффициентов r_0 и u_γ

γ	r_0	u_γ
0,80	1,61	0,842
0,90	2,30	1,282
0,95	3,00	1,645
0,975	3,69	1,960
0,990	4,61	2,326
0,995	5,30	2,576
0,9975	6,00	2,807
0,999	6,91	3,090

ПРИЛОЖЕНИЕ 1 к ГОСТ 11.005—74
Справочное

ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ ПРАВИЛ СТАНДАРТА

В приводимых примерах применимость экспоненциального распределения (в пп. 1—5) или распределения Пуассона (в п. 6) предполагается заранее известной.

1. Примеры для случая полностью определенной выборки

Пример 1. На опыте получено три значения продолжительности ремонта 350, 400 и 510 ч. Найти оценку и доверительные границы для средней продолжительности ремонта при доверительной вероятности 0,90.

Решение. Здесь $n=3$, $\gamma=0{,}90$, выборка полностью определенная. Согласно подпункту 1 табл. 2 настоящего стандарта находим

$$\bar{x}=\frac{1}{3}(350+400+510)=420 \text{ ч}.$$

Доверительные границы находим по подпункту 1 табл. 4 настоящего стандарта. Из табл. 6 и 7 настоящего стандарта для $m=3$ и $\gamma=0{,}90$ определяем $r_1=2{,}73$, $r_3=0{,}57$. Далее находим
$a_н=0{,}57\cdot 420=240$ ч;
$a_в=2{,}73\cdot 420=1147$ ч.

Пример 2. В условиях примера 1 найти оценку и доверительные границы для λ.

Решение. Согласно подпункту 1 табл. 3 настоящего стандарта находим

$$\bar{\lambda}=\frac{2}{350+400+510}=0{,}0016\ \frac{1}{ч}.$$

Доверительные границы находим по подпункту 1 табл. 5 настоящего стандарта. Из табл. 9 и 10 для $m=3$ и $\gamma=0{,}90$ определяем $r_4=0{,}38$, $r_5=1{,}82$. Далее находим

$$\lambda_н=\frac{0{,}0016}{1{,}82}=0{,}00088\frac{1}{ч};$$

$$\lambda_в=\frac{0{,}0016}{0{,}38}=0{,}0043\ \frac{1}{ч}.$$

2. Примеры для планов испытаний $[N, R, T]$, $[N, M, T]$, $[N, M, T_{\Sigma}]$

Пример 3. При испытаниях невосстанавливаемых объектов — электроосветительных ламп — по плану $[N, R, T]$ было получено 10 отказов. На испытания было поставлено $N=20$ ламп, длительность испытаний составляла $T=1000$ ч. Найти оценку и доверительные границы для средней наработки до отказа при доверительной вероятности 0,80.

Решение. Воспользуемся уравнениями в подпунктах 2 табл. 2 и 4 настоящего стандарта. Из табл. 6 и 7 настоящего стандарта для $m=10$ и $\gamma=0{,}80$ находим
$r_1=1{,}37$, $r_2=0{,}73$. Далее имеем

$$\bar{x}=\frac{20\cdot 1000}{10}=2000 \text{ ч};$$

$$a_н=0{,}73\cdot 2000=1460\ ч;$$

$$a_в=1{,}37\cdot 2000=2740\ ч.$$

Пример 4. В условиях примера 3 найти оценку и доверительные границы для интенсивности отказов.

Решение. Воспользуемся уравнениями в подпунктах 2 табл. 3 и 5 настоящего стандарта и данными примера 3. Получаем

$$\overline{\lambda}=\frac{10}{20\cdot 1000}=0{,}5\cdot 10^{-3}\ \frac{1}{ч};$$

$$\lambda_н=\frac{0{,}5\cdot 10^{-3}}{1{,}37}=0{,}36\cdot 10^{-3}\ \frac{1}{ч};$$

$$\lambda_в=\frac{0{,}5\cdot 10^{-3}}{0{,}73}=0{,}68\cdot 10^{-3}\ \frac{1}{ч}.$$

Пример 5. При испытаниях холодильников по плану $[N, M, T]$ не было получено отказов. При этом было $N=10$, $T=1000$ ч. Найти доверительные границы для наработки на отказ и параметра потока отказов при доверительной вероятности 0,95.

Решение. Воспользуемся выражениями в подпункте 2 табл. 4 и 5 настоящего стандарта. По табл. 11 настоящего стандарта для $\gamma=0{,}95$ находим $r_0=3{,}00$.

Далее имеем

$$a_н=\frac{10\cdot 1000}{3}=3333\ ч;$$

$$a_в=\infty;$$

$$\lambda_в=\frac{3}{10\cdot 1000}=3\cdot 10^{-4}\ \frac{1}{ч};$$

$$\lambda_н=0.$$

3. Примеры для плана испытаний $[N, U, T]$

Пример 6. При испытаниях полупроводниковых приборов по плану $[N, U, T]$ было получено пять отказов. При этом было $N=20$, $T=600$ ч, а наработки до отказа составили $x_1=40$ ч, $x_2=60$ ч, $x_3=90$ ч, $x_4=210$ ч, $x_5=600$ ч.

Найти оценку и доверительные границы для средней наработки до отказа при $\gamma=0{,}80$.

Решение. По выражению из подпункта 3 и табл. 2 настоящего стандарта находим

$$\overline{x}=\frac{40+60+90+210+600+15\cdot 600}{5}=\frac{10000}{5}=2000\ ч.$$

Воспользуемся теперь указаниями п. 3.2 настоящего стандарта.

Для $\gamma=0{,}80$ и $m=5$ из табл. 6 и 7 настоящего стандарта определяем $r_1=1{,}62$, $r_2=0{,}63$. Далее по формулам (6) и (7) настоящего стандарта вычисляем

$$R_1=1{,}62\left(1-\frac{5}{40}\right)+\frac{5}{40}=1{,}57;$$

$$R_2=0{,}63\left(1-\frac{5}{40}\right)+\frac{5}{40}=0{,}67;$$

Далее по формулам (4) и (5) настоящего стандарта находим

$$p_{н}=1-\frac{5}{20\cdot 0,67}=0,627;$$

$$p_{в}=1-\frac{5}{20\cdot 1,57}=0,841.$$

Теперь из выражений в подпункте 3 табл. 4 настоящего стандарта находим

$$a_{н}=\frac{600}{-\ln 0,627}=\frac{600}{0,470}=1280 \text{ ч};$$

$$a_{в}=\frac{600}{-\ln 0,841}=\frac{600}{0,172}=3490 \text{ ч}.$$

Пример 7. В условиях примера 6 найти оценку и доверительные границы для интенсивности отказов.

Решение. Используя выражения в подпункте 3 табл. 3 и 5 настоящего стандарта и результаты, полученные в примере 6, получим

$$\bar{\lambda}=\frac{5}{10000}=0,50\cdot 10^{-3}\ \frac{1}{ч};$$

$$\lambda_{н}=\frac{0,172}{600}=0,29\cdot 10^{-3}\ \frac{1}{ч};$$

$$\lambda_{в}=\frac{0,470}{600}=0,78\cdot 10^{-3}\ \frac{1}{ч}.$$

4. Примеры для планов испытаний $[N, R, r]$, $[N, U, r]$, $[N, M, r]$, $[N, M, r_{\Sigma}]$

Пример 8. При испытаниях невосстанавливаемых объектов (кинескопов) по плану $[N, R, r]$, где $N=20$, $r=5$, последний отказ был получен при длительности испытаний $x_r=600$ ч.

Найти оценку и доверительные границы для средней наработки до отказа при доверительной вероятности 0,8.

Решение. По выражению в подпункте 4 табл. 2 настоящего стандарта находим

$$\bar{x}=\frac{20\cdot 600}{5}=2400 \text{ ч}.$$

Доверительные границы находим по выражениям в подпункте 4 табл. 4 настоящего стандарта. Из табл. 6 и 8 настоящего стандарта по $\gamma=0,80$ и $m=5$ определяем $r_1=1,62$, $r_3=0,75$. Далее находим

$$a_{н}=0,75\cdot 2400=1800 \text{ ч};$$

$$a_{в}=1,62\cdot 2400=3890 \text{ ч}.$$

(сравните с решением примера 6).

Пример 9. При испытании резисторов по плану $[N, U, r]$, где $N=20$, $r=5$, отказы были получены при наработках в часах: $x_1=40$, $x_2=60$, $x_3=90$, $x_4=210$, $x_5=600$.

Найти оценку и доверительные границы для средней наработки до отказа при доверительной вероятности 0,80.

Решение. По выражению из подпункта 4 табл. 2 настоящего стандарта находим

$$\overline{x}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{5} x_i+15\cdot 600}{5}=2000 \text{ ч.}$$

Доверительные границы находим по выражениям в подпункте 4 табл. 4 настоящего стандарта. Из табл. 6 и 8 настоящего стандарта по $\gamma=0{,}80$ и $m=5$ определяем $r_1=1{,}62$, $r_3=0{,}75$. Далее находим

$$a_н=0{,}75\cdot 2000=1500 \text{ ч};$$

$$a_в=1{,}62\cdot 2000=3200 \text{ ч}.$$

(сравните с примером 6).

Пример 10. При испытаниях автомобильных карбюраторов по плану $[N, M, r]$, где $N=3$, $r=5$, наработки объектов составили: $x_1=3200$ ч, $x_2=5300$ ч, $x_3=1500$ ч. Найти оценку и доверительные границы для параметра потока отказов при доверительной вероятности $\gamma=0{,}99$.

Решение. Воспользуемся данными подпункта 4 табл. 3 и 5 настоящего стандарта. Здесь $m=3\cdot 5=15$, $S=3200+5300+1500=10000$ ч.
Находим

$$\overline{\lambda}=\frac{14}{10000}=1{,}4\cdot 10^{-3}\ \frac{1}{ч}.$$

Из табл. 9 и 10 настоящего стандарта для $\gamma=0{,}99$ и $m=15$ находим $r_4=0{,}55$, $r_5=1{,}87$. Далее имеем

$$\lambda_н=\frac{1{,}4\cdot 10^{-3}}{1{,}87}=0{,}75\cdot 10^{-3}\ \frac{1}{ч};$$

$$\lambda_в=\frac{1{,}4\cdot 10^{-3}}{0{,}55}=2{,}5\cdot 10^{-3}\ \frac{1}{ч}.$$

Пример 11. При испытаниях телевизоров по плану $[N, M, r_\Sigma]$, где $N=3$, $r_\Sigma=1$, наработки объектов составили по 2300 ч. Найти оценку и доверительные границы для параметра потока отказов при доверительной вероятности 0,99.

Решение. Здесь $S=3\cdot 2300=6900$ ч, $m=1$. Воспользуемся данными подпункта 4 табл. 3 и 5 настоящего стандарта.
Находим

$$\overline{\lambda}=\frac{1}{6900}=0{,}145\cdot 10^{-3}\frac{1}{ч}.$$

Из табл. 6 и 8 настоящего стандарта для $m=1$ и $\gamma=0{,}99$ определяем $r_1=100$, $r_3=0{,}22$. Далее находим

$$\lambda_н=\frac{0{,}145\cdot 10^{-3}}{100}=0{,}145\cdot 10^{-5}\frac{1}{ч};$$

$$\lambda_в=\frac{0{,}145\cdot 10^{-3}}{0{,}22}=0{,}66\cdot 10^{-3}\ \frac{1}{ч}.$$

5. Примеры для двойственных планов испытаний

Пример 12. При испытаниях переносных радиоприемников по плану $[N, R, (r, T)]$, где $N=20$, $r=12$, $T=1000$ ч, было получено 10 отказов при длительности испытаний 1000 ч.

Найти оценку и доверительные границы для средней наработки до отказа при $\gamma=0{,}80$.

Решение. Здесь раньше было достигнуто заданное время испытаний T, чем заданное число r отказов. Поэтому решение примера сводится к случаю плана $[N, R, T]$ — см. пример 3.

Пример 13. При испытаниях по плану $[N, R, (r, T)]$, где $N=20$, $r=5$, $T=1000$ ч, было получено пять отказов при длительности испытания 600 ч. Найти оценку и доверительные границы для средней наработки до отказа при доверительной вероятности 0,8.

Решение. Здесь раньше было достигнуто заданное число отказов, чем заданное время T. Поэтому решение сводится к случаю плана $[N, R, r]$ — см. пример 8.

6. Примеры для распределения Пуассона

Пример 14. Из партии деталей взята выборка объема $n=50$. В этой выборке оказалось $k=2$ дефектных изделия. Найти оценку и доверительные границы для доли дефектных изделий в партии при доверительной вероятности 0,90.

Решение. По формуле (16) настоящего стандарта находим

$$\overline{q}=\frac{2}{50}=0{,}04.$$

Из табл. 6 и 7 настоящего стандарта для $\gamma=0{,}90$ и $m=2$ находим $r_1=3{,}77$, $r_2=0{,}38$. По формулам (17) и (18) настоящего стандарта находим

$$q_н=\frac{0{,}04}{3{,}77}=0{,}01;$$

$$q_в=\frac{0{,}04}{0{,}38}=0{,}105.$$

Пример 15. Решить пример 14 при условии, что в выборке не оказалось дефектных изделий.

Решение. В этих условиях $\overline{q}=q_н=0$, и остается только найти $q_в$. Для $\gamma=0{,}90$ из табл. 11 настоящего стандарта находим $r_0=2{,}30$. По уравнению (19) определяем

$$q_в=\frac{2{,}30}{50}=0{,}046.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2 к ГОСТ 11.005—74
Справочное

ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ СТАНДАРТА

1. Случайная непрерывная положительная величина x называется распределенной по экспоненциальному закону, если ее плотность вероятности имеет вид

$$\varphi(x)=\begin{cases}\lambda\exp(-\lambda x), & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0,\end{cases} \tag{1}$$

где λ — положительная постоянная.

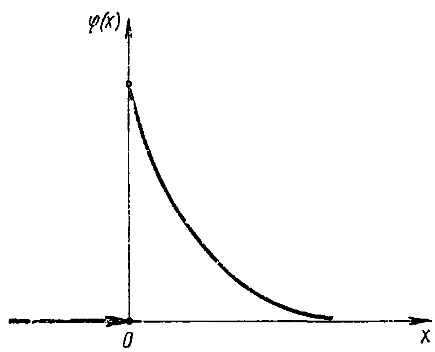

Рис. 1. График плотности $\varphi(x)$ экспоненциального распределения.

Бесконечная совокупность значений случайной величины x, распределенной согласно уравнению (1), называется экспоненциальной генеральной совокупностью.

Случайная величина x может иметь различный физический смысл. Это может быть, например:

случайная длительность обслуживания требования в системе массового обслуживания;

случайная наработка до отказа (или между отказами) в задачах теории надежности;

случайная длительность ремонта изделия;

случайная длительность контроля аппаратуры;

случайная длительность некоторой операции и т. п.

2. Параметр λ в (1) является генеральной характеристикой случайной величины x. Этот параметр связан с генеральной средней a уравнением.

$$\lambda=\frac{1}{a}. \tag{2}$$

3. Если случайная величина x в (1) является наработкой до отказа невосстанавливаемого объекта, то параметр λ называется интенсивностью отказов, а

величина a — средней наработкой до отказа. В этом случае вероятность безотказной работы на промежутке от 0 до t определяется по формуле

$$p(t)=\exp(-\lambda t)=\exp\left(-\frac{t}{a}\right). \tag{3}$$

4. Если случайная величина x в (1) является наработкой между соседними отказами восстанавливаемого объекта (случай простейшего потока отказов), то параметр λ называется параметром потока отказов, а величина a — наработкой на отказ. В этом случае вероятность безотказной работы на любом промежутке $t=t_2-t_1$ также находится по формуле (3). (Здесь имеется ввиду, что длительность восстановления из рассмотрения исключается).

5. Если известна генеральная характеристика λ, то две другие генеральные характеристики a и $p(t)$ могут быть найдены по уравнениям (2) и (3).

Если известна генеральная характеристика $p(t)$, то две другие генеральные характеристики λ и a могут быть найдены по уравнениям (2) и (3).

Если известна генеральная характеристика $p(t)$, то генеральная характеристика λ определяется по формуле

$$\lambda=-\frac{1}{t}\ln p(t), \tag{4}$$

а генеральная характеристика a определяется по формуле (2).

6. Конечная совокупность n значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ случайной величины x, удовлетворяющей п. 1, называется выборкой из совокупности, распределенной по экспоненциальному закону. В стандарте рассматриваются только случайные выборки из генеральной совокупности, в которых значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ получены случайным образом и независимо друг от друга. Число n называется объемом выборки.

Если все значения $x_1, \ldots, x_n$ в выборке известны, то выборка называется полностью определенной.

Если в выборке объема n значения $x_1, \ldots, x_m$ известны $(m<n)$, а относительно остальных $n-m$ значений известно только, что они больше некоторого числа t_u, то такая выборка называется неполностью определенной.

7. По выборке могут быть найдены оценки $\overline{\lambda}$, $\overline{x}$ и $\overline{p}(t)$ для генеральных характеристик λ, a и $p(t)$ соответственно.

Если имеет место равенство

$$M(\overline{\lambda})=\lambda, \tag{5}$$

где M — знак математического ожидания, то оценка $\overline{\lambda}$ называется несмещенной. Аналогично обстоит дело с оценками $\overline{x}$ и $\overline{p}(t)$, если имеют место равенства:

$$M(\overline{x})=a, \tag{6}$$

$$M(\overline{p}(t))=p(t). \tag{7}$$

8. Если по выборке найдена одна из оценок $\overline{x}$, $\overline{\lambda}$ или $\overline{p}(t)$, то две остальные оценки можно определить из уравнений

$$\overline{\lambda}=\frac{1}{\overline{x}}, \tag{8}$$

$$\overline{p}(t)=\exp(-\overline{\lambda}t)=\exp\left(-\frac{t}{\overline{x}}\right), \tag{9}$$

$$\overline{x}=-\frac{t}{\ln\overline{p}(t)}. \tag{10}$$

Если одна из оценок $\overline{\lambda}$, $\overline{x}$, $\overline{p}(t)$ является несмещенной, то две другие оценки, найденные из уравнений (8)—(10) по несмещенной оценке, в общем случае не будут несмещенными.

Выражения для несмещенных оценок $\overline{p}(t)$ приведены в таблице.

9. Для заданной вероятности γ_1 по выборке может быть найдена величина $\lambda_н$ (соответственно $a_н$, $p_н(t)$ так что интервал от $\lambda_н$ (соответственно $a_н$, $p_н(t)$) до ∞ накрывают соответствующую генеральную характеристику с этой вероятностью γ_1.

Величины $\lambda_н$, $a_н$, $p_н(t)$ называются нижними доверительными границами для соответствующих генеральных характеристик, а величина γ_1 — односторонней доверительной вероятностью.

10. Для заданной вероятности γ_2 по выборке может быть найдена величина $\lambda_в$ (соответственно $a_в$, $p_в(t)$) так, что интервал от 0 до $\lambda_в$ (соответственно $a_в$, $p_в$ (t) накрывает соответствующую генеральную характеристику с этой вероятностью γ_2.

Величины $\lambda_в$, $a_в$, $p_в(t)$ называются верхними доверительными границами для соответствующих генеральных характеристик, а величина γ_2 — односторонней доверительной вероятностью.

11. Нижние и верхние доверительные границы образуют доверительный интервал, который с некоторой вероятностью γ^* накрывает соответствующую генеральную характеристику.

Вероятность γ^* называется двусторонней доверительной вероятностью. Имеет место равенство

$$\gamma^*=\gamma_1+\gamma_2-1 \tag{11}$$

(при $\gamma_1>0{,}5$ и $\gamma_2>0{,}5$).

В частном случае, когда

$$\gamma_1=\gamma_2=\gamma \tag{12}$$

равенство (11) принимает вид:

$$\gamma^*=2\gamma-1. \tag{13}$$

12. Доверительные границы для $p(t)$ находятся по уравнениям

$$p_н(t)=\exp(-\lambda_в t)=\exp\left(-\frac{t}{a_н}\right), \tag{14}$$

$$p_в(t)=\exp(-\lambda_н t)=\exp\left(-\frac{t}{a_в}\right), \tag{15}$$

где $\lambda_н$ и $\lambda_в$ находятся по правилам п. 3.3, а $a_н$ и $a_в$ — по правилам пп. 3.1 и 3.2 настоящего стандарта.

13. Случайная дискретная величина x называется распределенной по закону Пуассона, если она может принимать любое целое неотрицательное значение k с вероятностью

$$p_k=\frac{a^k e^{-a}}{k!}, \tag{16}$$

где постоянная a является математическим ожиданием случайной величины x.

14. В методическом отношении удобно восемь простых планов испытаний, рассмотренных в стандарте, разбить на четыре группы:

I — планы $[N, R, r]$, $[N, M, r]$, $[N, M, r_\Sigma]$. При этих планах испытаний получается простейший поток отказов. Заданным здесь является число отказов r, а случайной величиной — суммарная наработка за время испытаний. Эта суммарная наработка имеет гамма-распределение [1]. Оценка и доверительные границы при плане $[N, R, r]$ для λ приведены в [1], а для a—в [9]. Оценка для $p(t)$ приведена в [10].

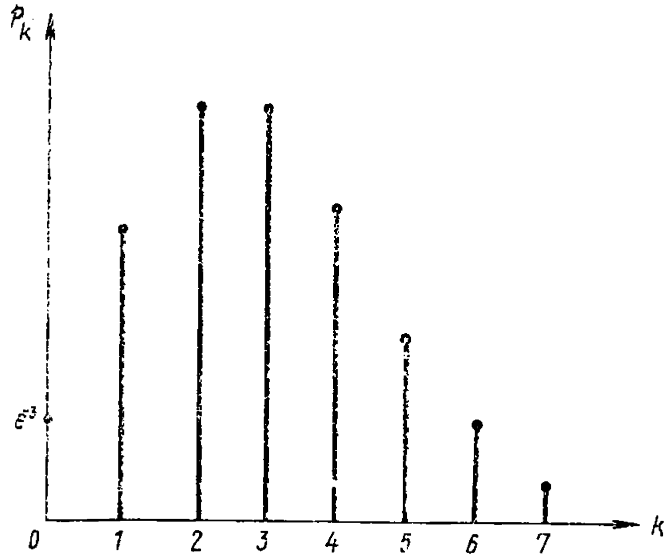

Рис. 2. График распределения Пуассона ($a=3$)

Эти оценки и доверительные границы очевидно переносятся и на планы $[N, M, r]$, $[N, M, r_{\Sigma}]$.

Особо следует отметить случай $r=1$. В этом случае несмещенная оценка для λ, полученная при $r>1$, неприменима. Здесь приходится пользоваться смещенной оценкой, которая равна обратной величине несмещенной оценки для a.

II — план $[N, U, r]$. Хотя при этом плане и нет простейшего потока отказов, но случайная наработка до r-го отказа и здесь имеет гамма-распределение [1]. Поэтому все уравнения для планов, указанных выше, здесь остаются в силе. Частным случаем этого плана является случай полностью определенной выборки, который имеет место при $r=N$.

III — планы $[N, R, T]$, $[N, M, T]$, $[N, M, T_{\Sigma}]$. При этих планах испытаний получается простейший поток отказов. Здесь задана суммарная наработка до отказа, а случайным является число отказов. Это случайное число отказов имеет распределение Пуассона. Исходя из распределения Пуассона, легко получить оценки для λ, a и $p(t)$ (см. [1] и [9]).

IV — план $[N, U, T]$. В этом случае нет простейшего потока отказов. Число отказов в этом случае имеет биномиальное распределение; случайными являются одновременно две величины — суммарная наработка и число отказов. Поэтому расчеты оценок и доверительных границ в этом случае сильно усложняются. В стандарте для этого случая приведены смещенные оценки для λ и a; в настоящем приложении дается несмещенная оценка для $p(t)$, которая не учитывает всей информации, полученной на испытаниях [1]. Доверительные границы для λ и a здесь также не учитывают всей информации, полученной на испытаниях.

Двойственные планы $[N, R, (r, T)]$ и др. рассмотрены в [1].

15. Коэффициенты для доверительных границ вычислены по формулам

$$r_1=\frac{2m}{\chi^2_{1-\gamma}\ (2m)}\ ; \qquad r_2=\frac{2m}{\chi^2_{\gamma}\ (2m+2)}\ ;$$

$$r_3=\frac{2m}{\chi^2_{\gamma}\ (2m)}\ ; \qquad r_4=\frac{m-1}{m}\,r_3;$$

$$r_5=\frac{m-1}{m}\,r_1; \qquad r_0=\frac{1}{2}\,\chi^2_{\gamma}\ (2),$$

где $\chi_p^2\ (l)$ — квантиль распределения χ^2 с l степенями свободы, отвечающая вероятности p; она возникает здесь из-за того, что сумма m экспоненциально распределенных случайных величин имеет распределение χ^2 с $2m$ степенями свободы.

Коэффициент r_1, r_2, r_3, r_0 предложены в [9].

Коэффициенты r_4 и r_5 добавлены для удобства использования оценок λ.

Применение всех этих коэффициентов имеет следующие преимущества:

— упрощается техника вычисления доверительных границ;

— сокращается объем таблиц, так как эти коэффициенты изменяются значительно медленнее, чем квантили χ^2;

— значительно упрощается планирование испытаний.

Приближенные формулы для r_i при $m>100$ получены с помощью нормальной аппроксимации χ^2 [11]:

$$\chi_p^2\ (l) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2l-1}+u_p\right)^2.$$

16. Табл. 6—11 настоящего стандарта составлены с использованием источников [2, 3, 4, 5, 9, 11].

Приближенные формулы (6)—(9) настоящего стандарта для вычисления оценок $\bar{x}$ в случае плана $[N,\ U,\ T]$ составлены на основе уравнений Л. Н. Большева (см. [2], стр. 104—107).

При $m<\frac{n-1}{2}$ имеем

$$\sum_{i=0}^{m} C_n^i\ p^i(1-p)^{n-i} = \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{i!} a^i e^{-a},$$

где

$$a=\frac{(2n-m)p}{2-p}.$$

При $m\geqslant\frac{n-1}{2}$ имеем

$$\sum_{i=0}^{m} C_n^i\ p^i(1-p)^{n-i} = \sum_{i=0}^{n-m-1} \frac{1}{i!} a^i e^{-a},$$

где

$$a=\frac{(n+m+1)(1-p)}{1+p}.$$

При этом еще используется зависимость между распределениями Пуассона и χ^2: если

$$\sum_{i=0}^{m} \frac{1}{i!} a^i e^{-a} = p,$$

то

$$2a=\chi_{1-p}^2\ (2m+2).$$

При выводе формул (4—9) настоящего стандарта использована монография [9] (стр. 56, 87—88, 193).

Выражения для несмещенных оценок $p(t)$

Случай	$p(t)$
1. Полностью определенная выборка	при $t< \sum_{i=1}^{n} x_i$ $\left(1-\frac{t}{\sum_{i=1}^{n} x_i}\right)^{N-1}$
2. Испытания по планам $[N, R, T]$, $[N, M, T]$, $[N, M, T_\Sigma]$	при $t<S$ $\left(1-\frac{t}{S}\right)^{m}$
3. Испытания по плану $[N, U, T]$	при $t=T$ $1-\frac{m}{N}$
4. Испытания по планам $[N, R, r]$, $[N, U, r]$, $[N, M, r]$, $[N, M, r_\Sigma]$	при $t<S$ $\left(1-\frac{t}{S}\right)^{m-1}$

Обозначения см. в п. 18.

17. **Пример вычисления оценок и доверительных границ для вероятности безотказной работы** $p(t)$. В условиях примера 1 приложения 1 найти оценку и доверительные границы для вероятности того, что длительность операции будет более 500 ч.

Решение. Здесь имеем $t=500$ ч, $n=3$, $\sum_{i=1}^{n} x_i=1260$ ч. По выражению в подпункте 1 таблицы находим несмещенную оценку

$$\bar{p}(500)=\left(1-\frac{500}{1260}\right)^2=0{,}364.$$

Смещенную оценку можно получить по формуле (9).
Используя результат примера 1 приложения 1:
$\bar{x}=420$ ч, получаем из формулы (9)

$$\bar{p}(500)=\exp\left(-\frac{500}{420}\right)=0{,}307.$$

Теперь найдем доверительные границы для $p(500)$. Из примера 1 приложения 1 имеем $x_{н}=240$ ч, $x_{в}=1147$ ч. Воспользовавшись формулами (14), (15), находим

$$p_{н}(500)=\exp\left(-\frac{500}{240}\right)=0{,}125;$$

$$p_{\text{в}}(500)=\exp\left(-\frac{500}{1147}\right)=0{,}65.$$

18. **Условные обозначения**

x — случайная величина;
a — математическое ожидание случайной величины;
λ — параметр экспоненциального распределения;
$p(t)$ — вероятность безотказной работы на промежутке времени t;
q — доля дефектных изделий в партии;
n — объем выборки;
N — число объектов, подлежащих испытанию;
T — заданная длительность испытаний;
T_{Σ} — заданная суммарная наработка по программе испытаний;
r — заданное число отказов;
r_{Σ} — заданное суммарное число отказов;
S — фактическая суммарная наработка всех объектов за время испытаний;
m — суммарное число отказов, полученное за время испытаний;
$\bar{\lambda}$, $\bar{x}$, $\bar{p}(t)$, $\bar{q}$ — статистические оценки соответственно для λ, a, $p(t)$, q;
$\gamma_{\text{н}}$ — доверительная вероятность;
λ, $a_{\text{н}}$, $p_{\text{н}}(t)$, $q_{\text{н}}$ — нижняя доверительная граница соответственно для λ, a, $p(t)$, q;
$\lambda_{\text{в}}$, $a_{\text{в}}$, $p_{\text{в}}(t)$, $q_{\text{в}}$ — верхняя доверительная граница соответственно для λ, a, $p(t)$, q.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гнеденко Б. В., Беляев Ю. К., Соловьев А. Д. Математические методы в теории надежности. М., «Наука», 1965.
2. Большев Л. Н., Смирнов Н. В. Таблицы математической статистики. М., «Наука», 1965.
3. Оуэн Д. Б. Сборник статистических таблиц. М., Изд-во ВЦ АН СССР, 1966.
4. Янко Я. Математико-статистические таблицы. М., Госстатиздат, 1961.
5. Шор Я. Б., Кузьмин Ф. И. Таблицы для анализа и контроля надежности. М., «Сов. радио», 1968.
6. Справочник по надежности, т. 1. М., Мир, 1969.
7. Ллойд Д. К., Липов М. Надежность. М. ,«Сов. радио», 1964.
8. Броди С. М., Власенко О. Н., Марченко Б. Г. Расчет и планирование испытаний систем на надежность. Киев, «Наукова думка», 1970.
9. Шор Я. Б. Статистические методы анализа и контроля качества и надежности. М., «Сов. радио», 1962.
10. Кроль И. А. Несмещенные оценки для количественных характеристик надежности при различных планах испытаний.
Труды ВНИИЭМ, т. 33, М., 1970.
11. Hald A., Statistical Tables and Formulas, 1952.

Редактор *С. И. Бобарыкин*
Технический редактор *Э. В. Митяй*
Корректор *С. И. Ковалева*

Сдано в наб. 28.06.84 Подп. в печ. 08.01.85 2,0 п. л. 2,0 усл. кр.-отт. 2,20 уч.-изд. л.
Тираж 6000 Цена 10 коп.

Ордена «Знак Почета» Издательство стандартов, 123840, Москва, ГСП,
Новопресненский пер., д. 3.
Вильнюсская типография Издательства стандартов, ул. Миндауго, 12/14. Зак. 3573